

2450

53742-01743

33-5/3

C.N.E.N.

official

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE

CORSO DI PERFEZIONAMENTO IN FISICA NUCLEARE APPLICATA

(1958-59)

33)

LEZIONI SULLE MACCHINE ACCELERATRICI

Prof. E. PERSICO

a cura dei Dott.i
E.Ferrari e S.E.Segre

I N D I C E

Cap. I	Pag.
RASSEGNA DEI VARI TIPI DI ACCELERATORI DI PARTICELLE	
§ I-1. Generalità.....	1
§ I-2. Elementi di dinamica relativistica.....	4
§ I-3. Acceleratori elettrostatici.....	8
§ I-4. Betatrone.....	9
§ I-5. Acceleratori lineari.....	12
§ I-6. Ciclotrone.....	16
§ I-7. Sincrociclotrone.....	18
§ I-8. Sincrotrone.....	20
§ I-9. Caratteristiche di alcune macchine tipiche.....	24
§ I-10. Sorgenti di particelle.....	26
Cap. II	
ACCELERATORI ELETTROSTATICI	
§ II-1. Il tubo acceleratore.....	32
§ II-2. Generatore di Van de Graaff.....	36
§ II-3. Generatore di Cockroft e Walton.....	43
Cap. III	
DINAMICA DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO	
§ III-1. Caso generale.....	51
§ III-2. Il campo elettromagnetico delle macchine accelera trici.....	53
§ III-3. Dinamica di una particella carica nel campo elet tromagnetico delle macchine acceleratrici.....	56
§ III-4. Perdita di energia per irraggiamento.....	60

Cap. IV

TEORIA DEL BETATRONE

§ IV-1. Introduzione.....	63
§ IV-2. Orbite circolari e cerchio istantaneo. Orbita di equilibrio.....	63
§ IV-3. Condizioni di stabilità per il moto di un elettrone generico.....	70
§ IV-4. Oscillazioni di betatrone.....	75
§ IV-5. Smorzamento delle oscillazioni di betatrone.....	76
§ IV-6. Realizzazione pratica del betatrone.....	79

Cap. V

TEORIA DEL SINCROTRONE

§ V-1. Considerazioni introduttive.....	84
§ V-2. Fase di una particella. Particella sincrona.....	89
§ V-3. Equazione della fase.....	91
§ V-4. Discussione dell'equazione della fase.....	96
§ V-5. Oscillazioni di sincrotrone.....	99
§ V-6. Caso delle piccole oscillazioni.....	103
§ V-7. L'iniezione nel sincrotrone.....	106
§ V-8. Effetti di risonanza.....	112
§ V-9. Realizzazione del campo magnetico del sincrotrone..	114

Cap. VI

SINCROTRONI A GRADIENTE ALTERNATO

§ VI-1. Considerazioni introduttive.....	116
§ VI-2. Cenno sull'algebra delle matrici.....	121
§ VI-3. Oscillazioni di betatrone in un sincrotrone a G.A.: matrici caratteristiche.....	126

§ VI-4. Condizioni di stabilità delle oscillazioni di betatrone.....	130
§ VI-5. Calcolo di z e z' dopo un numero qualsiasi di elementi periodici.....	131
§ VI-6. Applicazione al caso del race-track.....	132
§ VI-7. Un caso particolare di sincrotrone a G.A.. Il diagramma di stabilità.....	138
§ VI-8. Errori di allineamento. Linee proibite.....	141
§ VI-9. Oscillazioni di fase in un sincrotrone a G.A.. Energia di transizione.....	144
§ VI-10. Esempi di realizzazione di sincrotroni a G.A..	146

Cap. VII

I CICLOTRONI

§ VII-1. Fase di una particella in un ciclotrone.....	151
§ VII-2. Stabilità delle oscillazioni orizzontali e verticali nei ciclotroni.....	153
§ VII-3. Variazione della fase nel ciclotrone a frequenza fissa.....	155
§ VII-4. Limitazioni all'energia ottenibile con un ciclotrone.....	159
§ VII-5. Cenno sui problemi tecnici del ciclotrone.....	162
§ VII-6. Il microtrone.....	164
§ VII-7. Il sincrociclotrone.....	168
§ VII-8. Sorgenti per ciclotroni.....	170

Cap. VIII

GLI ACCELERATORI LINEARI

§ VIII-1. Introduzione.....	173
§ VIII-2. Acceleratori ad elettrodi cilindrici.....	176
§ VIII-3. Acceleratori a guida d'onda.....	178

Cap. IX

RECENTI PROPOSTE DI NUOVI TIPI DI ACCELERATORI

§ IX-1. Introduzione.....	185
§ IX-2. Acceleratori FFAG.....	186
§ IX-3. Acceleratori a fasci intersecantisi.....	190
§ IX-4. Acceleratori a fascio autofocalizzante.....	195

APPENDICE I

IL SINCROTRONE DELLA AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY.....	200
--	-----

APPENDICE II

LENTI MAGNETICHE QUADRIPOLARI.....	202
------------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA.....	209
-------------------	-----

CAPITOLO I

RASSEGNA DEI VARI TIPI DI ACCELERATORI DI PARTICELLE

§ I-1. Generalità.

Gli acceleratori di particelle, detti anche macchine acceleratrici, servono ad imprimere a particelle cariche energie cinetiche tali da renderle utilizzabili per produrre reazioni nucleari. Generalmente le particelle accelerate sono elettroni, oppure ioni positivi leggeri (H^+ , D^+ , He^{++}); eccezionalmente si possono accelerare anche ioni pesanti (per es. C^+). Le energie ottenibili dipendono dal tipo di macchina e giungono, in alcuni degli acceleratori esistenti, fino a diverse migliaia di MeV^(*). Tali limiti però non sono imposti da ragioni teoriche, ma solo dal costo enorme di tali macchine.

L'unico sistema praticamente efficace per accelerare particelle cariche è di sottoporle all'azione di un campo elettrico opportunamente diretto. I vari tipi di macchine acceleratrici differiscono essenzialmente per il modo in cui tale campo è prodotto e per come esso agisce sulle particelle da accelerare.

In linea di principio il funzionamento di un acceleratore si svolge secondo le seguenti fasi. Da una opportuna "sorgente" vengono immesse nella macchina le particelle da accelerare. Queste, collimate in un fascio, percorrono in essa una traiettoria opportuna sotto l'azione di un campo elettrico accele

(*) Ricordiamo che con eV (elettronvolt) si indica l'energia acquistata da una particella avente carica uguale a quella dell'elettrone ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb) nel passare attraverso una caduta di potenziale di 1 volt. Si ha $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ joule} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$. Sono di uso corrente i seguenti simboli per i multipli di questa unità:

$$1 \text{ KeV} = 10^3 \text{ eV}; \quad 1 \text{ MeV} = 10^6; \quad 1 \text{ GeV} \text{ o } 1 \text{ BeV} = 10^9 \text{ eV}.$$

ratore (che può agire con continuità, oppure ad impulsi), fino a che non hanno raggiunto l'energia richiesta: quindi vengono fatte urtare contro un bersaglio (chiamato anche "targhetta", traduzione non felice dell'inglese "target"), ove avviene la reazione nucleare voluta. Spesso le particelle secondarie prodotte nella reazione possono essere collimate ed utilizzate a loro volta. Il bersaglio si può porre entro la macchina; ma in certi casi si riesce ad estrarre dalla macchina il fascio di particelle accelerate, in modo da far loro colpire un bersaglio posto all'esterno. Bisogna tener presente che le particelle si devono muovere nel vuoto per tutto il loro percorso, onde evitare che vengano rallentate e deviate dagli urti contro le molecole dell'aria. Spesso è sufficiente un vuoto dell'ordine di grandezza di 10^{-5} mmHg.

Nel valutare la prestazione di un acceleratore di particelle si deve tener conto degli elementi seguenti:

- a) Energia massima delle particelle;
- b) Intensità del fascio: cioè numero di particelle accelerate per unità di tempo;
- c) Stabilità in energia (in certe macchine l'energia compie piccole oscillazioni intorno al suo valore medio);
- d) Omogeneità in energia (spesso le particelle che arrivano sul bersaglio nello stesso istante hanno energie leggermente diverse tra loro);
- e) Collimazione del fascio (un fascio si dice "collimato" se le particelle hanno tutte velocità parallele);
- f) Tipo di particelle accelerate;
- g) Funzionamento continuo o pulsato (alcune macchine producono un flusso continuo di particelle, altre invece mandano le particelle sul bersaglio raggruppate in "pacchetti");
- h) Costo della macchina.

Gli acceleratori si possono dividere in due grandi categorie. Una prima categoria è quella dei cosiddetti acceleratori elettrostatici, in cui le particelle si accelerano sottoponendole ad una differenza di potenziale costante nel tempo, il cui valore fissa il valore dell'energia finale delle particelle. Di questa categoria fanno parte gli acceleratori di Van de Graaff e di Cockroft e Walton.

L'energia raggiungibile con le macchine di questo tipo è limitata dalle scariche che hanno luogo tra le parti della macchina mantenute ad alta tensione e le pareti dell'ambiente ove l'acceleratore è contenuto, quando d.d.p. supera un certo valore critico (ordine di grandezza 10^6 volt). Si possono così accelerare particelle fino a qualche MeV.

Per sorpassare tale limite si deve rinunciare all'uso di campi elettrostatici. Infatti questi ultimi sono conservativi e la loro circuitazione è sempre nulla: qualunque sia il percorso che le particelle compiono in essi, l'energia cinetica acquistata dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo della traiettoria, e quindi non può superare l'energia (potenziale) corrispondente alla massima d.d.p. esistente nella macchina. Se invece si ricorre ad un campo elettrico variabile, non conservativo (accompagnato necessariamente da un campo magnetico variabile per l'equazione $\text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$) è possibile trovare opportuni percorsi chiusi lungo cui la circuitazione di \vec{E} , e quindi l'energia cinetica guadagnata dalle particelle, è diversa da zero. Facendo percorrere più volte alle particelle tali cammini si realizza così un processo graduale di accelerazione non più limitato dalla massima d.d.p. esistente nella macchina.

Le macchine che impiegano questo principio costituiscono la seconda categoria di acceleratori. In esse la d.d.p. acceleratrice corrisponde ad una piccola frazione del valore massimo dell'energia da raggiungere, e questa viene ottenuta sottoponendo le particelle da accelerare un gran numero di volte all'azione

del campo elettrico acceleratore. Le particelle possono percorrere traiettorie rettilinee (acceleratori lineari) o curve; queste ultime sono ottenute generalmente facendo muovere le particelle in un campo magnetico. Macchine di quest'ultimo tipo, differenti per i dettagli del processo di accelerazione, sono il betatrone, il ciclotrone, il sincrociclotrone, il sincrotrone.

§ I-2. Elementi di dinamica relativistica

Ricordiamo brevemente i risultati della dinamica relativistica di un punto materiale. Questa infatti si rende necessaria nello studio delle macchine acceleratrici perchè in esse le particelle raggiungono velocità confrontabili con quella della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ m/sec) e talvolta assai vicine ad essa; in tali condizioni la meccanica classica non è applicabile nemmeno approssimativamente.

Anche nella meccanica relativistica l'equazione fondamentale del moto di un punto materiale si può scrivere:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (I.2.1)$$

ove \vec{F} rappresenta la forza totale agente sul punto e \vec{P} (quantità di moto) è espressa da

$$\vec{P} = m_v \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (I.2.2)$$

In questa relazione m è una costante, caratteristica del punto, detta "massa di riposo", che coincide con la massa della meccanica classica; $m_v = m / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ è detta "massa alla velocità \vec{v} ". Con questa definizione, che implica una variazione della massa con la velocità, la quantità di moto ha ancora l'espressione formale del prodotto della massa per la velocità, come nella meccanica classica. Si noti che per velocità piccole rispet

to a c (precisamente tali da poter trascurare $\frac{v^2}{c^2}$ rispetto a 1) la (I.2.1) e la (I.2.2) si riducono alla legge della meccanica classica $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Proiettando la (I.2.1) sulla tangente, sulla normale e sulla binormale alla traiettoria ed indicando con R il raggio di curvatura si ottengono le equazioni (formalmente uguali a quelle della meccanica classica)

$$F_t = \dot{P} \quad F_n = \frac{Pv}{R} \quad F_b = 0 \quad (I.2.3)$$

La seconda delle (I.2.3) da l'espressione della forza centrifuga. Si può anche dimostrare che l'energia cinetica T di una particella è data dalla seguente espressione (ponendo, come si usa, $v/c = \beta$)

$$T = (m_v - m)c^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (I.2.4)$$

E' facile verificare, sviluppando in serie di potenze di β^2 e trascurando β^4 e le potenze superiori, che per $\beta^2 \ll 1$ la (I.2.4) si riduce all'espressione classica $T = \frac{1}{2}mv^2$.

La (I.2.4) suggerisce^(*) di attribuire alla particella avente massa m una quantità di energia E_0 , detta "energia intrinseca"

$$E_0 = mc^2 \quad (I.2.5)$$

e di definire una "energia totale" E data da

$$E = E_0 + T = m_v c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (I.2.6)$$

L'uso di E, invece di T, semplifica molte formule di meccanica relativistica. Dalle uguaglianze precedenti si ottengono infatti le seguenti importanti relazioni

$$m_v = m \left(1 + \frac{T}{E_0} \right) \quad (I.2.7)$$

$$c^2 P^2 + E_0^2 = E^2 \quad (I.2.8)$$

$$cP = \beta E \quad (I.2.9)$$

(*) Ciò è giustificato anche dal principio di equivalenza tra

da cui

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}} \quad (\text{I.2.10})$$

Dalla (I.2.6) si vede che la condizione perchè valga l'approssimazione classica, cioè $\beta^2 \ll 1$, si può anche mettere sotto la forma, in certi casi più comoda

$$T \ll E_0 \quad (\text{I.2.11})$$

Perciò è utile tener presente il valore di E_0 per le principali particelle elementari, che riportiamo nella seguente tabella:

Particelle	E_0 (MeV)
Elettrone	0,51
Protone (H^+)	938
Deutone (D^+)	1876
Particella α (He^{++})	3727

(I.2.12)

Da questo specchietto si vede che per gli elettroni la meccanica classica è completamente inapplicabile anche nel caso delle macchine più modeste, mentre per gli ioni fino a qualche centinaio di MeV essa rappresenta una prima approssimazione valida.

Per velocità molto prossime a quella della luce ($\beta \sim 1$, $T \gg E_0$) si può in tutte le formule porre $\beta = 1$, fuorchè ove compare l'espressione $1 - \beta^2$, e trascurare E_0 rispetto a T (approssimazione ultrarelativistica). Le (I.2.7), (I.2.8) e (I.2.9) si scrivono allora nella forma seguente:

$$m_v \approx m \frac{T}{E_0} \quad (\text{I.2.13})$$

$$E \approx T \approx cP \quad (\text{I.2.14})$$

Un'importante immediata applicazione delle formule precedenti è il calcolo del moto di una particella carica in un

campo magnetico costante, uniforme, e diretto perpendicolarmente alla sua velocità iniziale. La particella è sottoposta alla sola forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}^{(*)}$ ove \vec{v} è la velocità della particella, q la sua carica, e \vec{B} l'induzione magnetica nel punto da essa occupato. Dalle (I.2.3) si ottiene in tal caso:

$$\dot{P} = 0 \quad (I.2.15)$$

$$|q| vB = Pv/R$$

da cui si vede che la quantità di moto ha grandezza costante P , e che la particella descrive un cerchio di raggio R dato da

$$R = \frac{P}{|q| B} \quad (I.2.16)$$

Per elettroni, protoni o deutoni ($|q| = e$) la (I.2.16) si può scrivere, usando (I.2.9) e (I.2.10) nelle forme, praticamente comode

$$R = 3335 \beta \frac{E}{B} = 3335 \frac{E}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \quad (I.2.17)$$

e nell'approssimazione ultrarelativistica

$$R \cong 3335 \frac{T}{B} \quad (I.2.18)$$

Nelle formule (I.2.17) e (I.2.18) E , T , E_0 vanno espressi in MeV, B in gauss ($1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ weber/m}^2$): R risulta espresso in cm.

(*) Qui e nel seguito useremo il sistema di unità Giorgi, salvo indicazione contraria. Se si usano unità del sistema di Gauss, tale formula va scritta

$$\vec{F}_L = q \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}$$

§ I-3. Acceleratori elettrostatici

Gli acceleratori elettrostatici costituiscono il tipo più semplice di macchina acceleratrice. Essi consistono essenzialmente in un tubo (nel quale è fatto il vuoto) agli estremi del quale si trovano due elettrodi tra cui è mantenuta una differenza di potenziale costante. Uno degli elettrodi è a terra e costituisce il bersaglio; nell'altro elettrodo, mantenuto ad un potenziale elevato, viene posta la sorgente.

Il valore della d.d.p. applicata è proporzionale alla energia massima ottenibile (per particelle aventi la carica elettronica dà direttamente il suo valore in eV). Si cerca dunque di raggiungere tensioni quanto più elevate è possibile. Il limite è posto dalle scariche che si producono (all'esterno del tubo) tra i due elettrodi o tra l'elettrodo ad alta tensione e la terra o le pareti: perciò la tensione raggiungibile è tanto più alta quanto più il tubo è lungo e lontano dalle pareti. In pratica non è possibile superare tensioni di qualche milione di volt. Tale limite si può elevare se si racchiude tutta la macchina in un involucro riempito di azoto, o altro gas compresso a 10-15 atmosfere. Si è giunti così anche a tensioni di circa 10 milioni di volt.

Gli apparecchi usati per generare tali d.d.p. sono sostanzialmente due: la macchina di Van de Graaff ed il generatore di Cockroft e Walton, che verranno descritti con maggiori dettagli in seguito.

I vantaggi degli acceleratori elettrostatici sono: l'intensità notevole del fascio, il funzionamento continuo, la stabilità nell'energia (in certi casi entro l'1‰), e la buona collimazione del fascio.

§ I-4. Betatrone

Tra gli acceleratori della seconda categoria studiamo anzitutto il betatrone, impiegato per accelerare elettroni. Esso consiste di un magnete i cui poli hanno forma tronco-conica (fig. 1), alimentato a corrente alternata di frequenza per lo

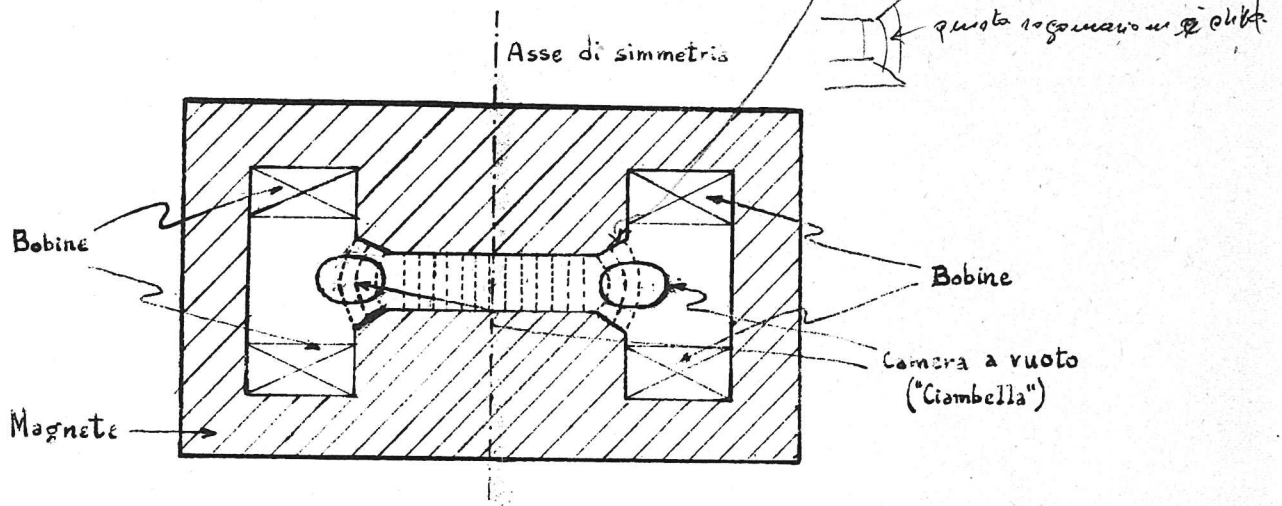


fig. 1

più compresa fra 50 e 200 hertz: nel suo traferro si trova un tubo a forma di toro (ciambella) che è la camera a vuoto in cui si fanno circolare gli elettroni.

In questa macchina il campo magnetico (le cui linee di forza sono tratteggiate in fig. 1) ha una doppia funzione:

- 1) Il flusso magnetico concatenato con la ciambella, variando nel tempo, produce un campo elettrico indotto le cui linee di forza sono cerchi concentrici ortogonali all'asse di simmetria, uno dei quali coincide con la direttrice della ciambella; ^(*) tale campo elettrico accelera gli elettroni.

(*) Chiameremo "direttrice" la circonferenza su cui si trovano i centri delle sezioni meridiane del toro (o, più generalmente, i baricentri delle sezioni meridiane della ciambella, che possono anche non essere circolari).

2) Il campo magnetico esistente nella ciambella esercita sugli elettroni una forza di Lorentz diretta verso il centro, che tende a mantenerli su un'orbita circolare.

Facciamo osservare che concettualmente si può considerare il betatrone come analogo ad un trasformatore in cui la corrente primaria è la corrente alternata che eccita il magnete e quella secondaria è la corrente elettronica che circola nella ciambella. ①

Affinchè il campo magnetico possa adempiere simultaneamente alla doppia funzione di accelerazione e di guida, è necessario che esista una certa relazione (che ora troveremo) tra il campo magnetico B sulla ciambella ed il suo valore medio \bar{B} nell'area da essa abbracciata. Detto R il raggio dell'orbita dell'elettrone, il flusso magnetico concatenato con essa è

$$\phi = \pi R^2 \bar{B} \quad (I.4.1)$$

e quindi gli elettroni sono soggetti ad un campo elettrico E la cui circuitazione è data da

$$2\pi R E = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow E = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt} \quad (I.4.2)$$

D'altra parte, per la prima delle (I.2.3)

$$\Rightarrow F_c = -e E = \frac{dP}{dt} = n \frac{dP}{dt} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt} \quad (I.4.3)$$

e sostituendo nella (I.4.2)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\phi}{dt} \quad (I.4.4)$$

Se si vuole che le particelle percorrano la ciambella bisogna che R resti costante ed uguale al raggio della **direttrice stessa**. Poichè R è dato dalla relazione (I.2.16)

$$R = \frac{P}{eB} \quad P = e R B \Rightarrow \frac{dP}{dt} = e R \frac{dB}{dt}$$

ove B è il campo nella ciambella, si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = e R \frac{dB}{dt} \quad (I.4.5)$$

Confrontando le (I.4.1), (I.4.4), (I.4.5) si ricava infine la relazione

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (I.4.6)$$

da cui integrando

$$B = \frac{1}{2} \bar{B} + \text{cost.} \quad (I.4.7)$$

che è la relazione cercata.

Poichè il campo elettrico indotto è, naturalmente, alternato, esso può accelerare gli elettroni solo nei semiperiodi in cui ha un dato verso: perciò gli elettroni sono fatti circolare solo per metà (o meno) del periodo della corrente alternata. Il funzionamento della macchina è quindi pulsato, con la stessa frequenza della corrente. Generalmente gli elettroni sono iniettati quando il campo magnetico è nullo. Quando il campo magnetico raggiunge il suo valore massimo, e tenderebbe poi a decelerare gli elettroni, il fascio viene utilizzato (in genere inviandolo sul bersaglio per la produzione di raggi X di alta energia).

Il betatrone viene impiegato per energie da circa 5 MeV a circa 300 MeV. Per energie inferiori sono più convenienti le macchine elettrostatiche; per energie superiori la grande quantità di ferro richiesta per il magnete lo rende troppo costoso. La stessa ragione sconsiglia il suo uso per accelerare ioni: per esempio, per protoni di 30 MeV, il raggio necessario sarebbe 8 volte maggiore che nel caso di elettroni di pari energia cinetica.

§ I-5. Acceleratori lineari

*Chiusa
per il campo microonde*

In queste macchine si impiega un campo elettrico acceleratore alternato a frequenza elevata, realizzata generalmente con la tecnica delle microonde. La traiettoria delle particelle è rettilinea. Lo schema di principio di un acceleratore lineare è indicato in fig. 2.

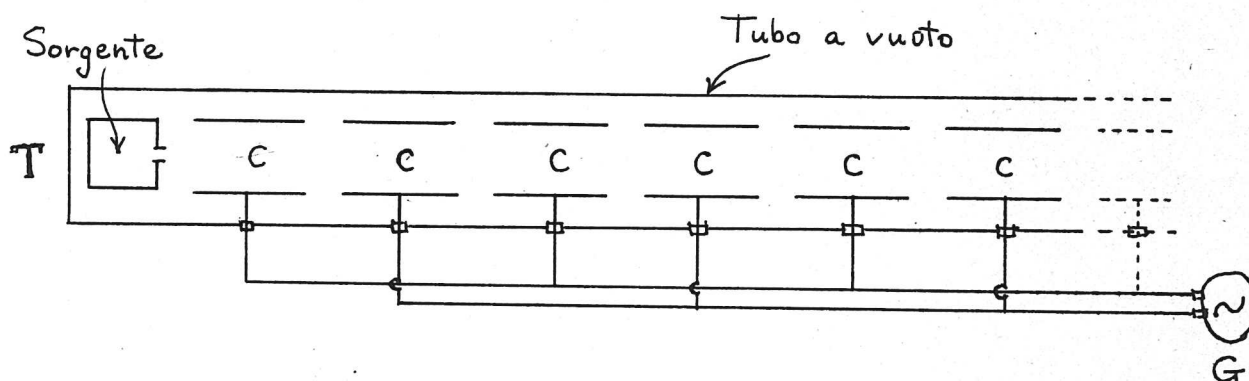


Fig. 2

T è il tubo a vuoto in cui viaggiano le particelle, C sono degli elettrodi a forma di cilindro cavo collegati alternativamente ai due poli del generatore di microonde G. Nell'interno dei cilindri C il campo elettrico è sempre nullo; nelle intercapedini tra un cilindro e l'altro si ha un campo elettrico alternato con la frequenza del generatore.

Le lunghezze dei cilindri sono calcolate in modo che una particella, la quale trovi nella prima intercapedine un certo determinato valore del campo elettrico, tale da accelerarla, impieghi per attraversare ciascuno di essi esattamente mezzo periodo dell'oscillazione del generatore. Tale particella (detta "particella sincrona") troverà sempre il campo elettrico tra un cilindro e l'altro nella stessa fase, e verrà quindi accelerata ad ogni passaggio, ricevendo una energia qV , dove V è la d.d.p. tra gli elettrodi all'istante dell'attraversamento. L'energia totale acquistata da essa sarà dunque uguale a questo valore moltiplicato per il numero

Se una particella è iniettata in ritardo o in anticipo rispetto alla particella sincrona, e se tale ritardo o anticipo non è troppo grande, essa non va perduta. Ad essa si applica in fatti il principio della stabilità di fase, che descriviamo brevemente e che tratteremo più dettagliatamente in seguito ^(*).

Consideriamo la fig. 3, in cui è rappresentata (a tratto pieno) la d.d.p. $U(t)$ esistente nella prima intercapedine.

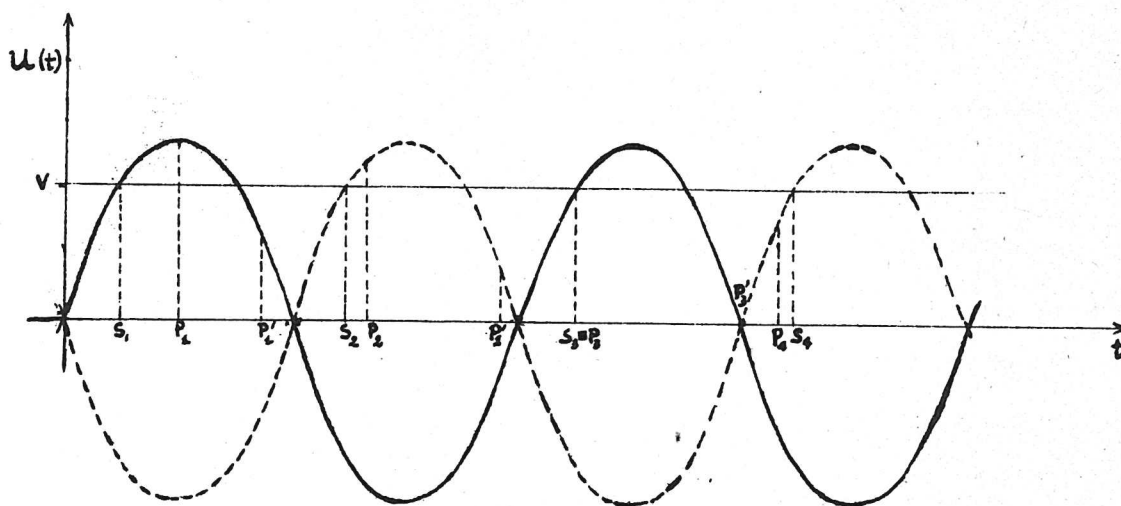


Fig. 3

Essa rappresenta anche ^{la} d.d.p. nella terza, nella quinta....., mentre nelle intercapedini di posto pari la d.d.p. è invertita ed è rappresentata dalla curva tratteggiata. Gli istanti in cui la particella sincrona (p.s.) attraversa le successive

(*) E' stata la scoperta teorica del principio della stabilità di fase (Veksler e, indipendentemente, Mac Millan, 1945) che ha aperto la via alla costruzione di acceleratori per altissime energie (sincrociclotroni, sincrotroni ed acceleratori lineari). Prima di essa la massima energia ottenibile era per elettroni di ~ 300 MeV (betatroni), e per ioni di poche decine di MeV (acceleratori elettrostatici e ciclotroni).

intercapedini sono indicati sull'asse dei tempi con s_1, s_2, \dots .
La tensione incontrata è sempre V .

Si consideri ora una particella che traversi la prima intercapedine per esempio all'istante p_1 , un po' in ritardo rispetto alla p.s.; essa incontra una d.d.p. maggiore di V e quindi impiega meno tempo che la p.s. a percorrere il secondo tubo: arriva perciò alla successiva intercapedine con un ritardo minore (istante p_2). Analogamente nei successivi passaggi il ritardo diminuisce ancora. Per fissare le idee supponiamo che già nella terza intercapedine la particella non abbia più ritardo (istante $p_3 \equiv s_3$)^(*): essa riceve allora la giusta quantità di energia qV , ma, siccome ha un po' di energia in eccesso sulla p.s. a causa dei precedenti passaggi, continua ad anticipare e traversa la successiva intercapedine un po' prima della p.s. (istante p_4). Tale anticipo però diminuisce nei successivi passaggi, perchè ora la particella riceve energia in difetto; dopo alcuni attraversamenti essa sarà di nuovo in fase con la p.s., e così di seguito. In definitiva la fase della particella generica oscilla intorno alla fase della p.s., e durante il percorso le particelle tendono a raggrupparsi in pacchetti attorno ad essa.

Si noti che ciò avviene solamente se la p.s. è iniettata nel quarto di periodo in cui la tensione è tale da accelerarla e crescente in modulo. Nel quarto di periodo in cui la tensione acceleratrice è decrescente in modulo, avviene il fenomeno inverso, come si vede da una semplice analisi del tipo già fatto; le particelle che per esempio ritardano sulla p.s. tendono ad aumentare il loro ritardo, fino a che giungono ad una fase in cui il campo è nullo e non vengono più accelerate. (Cfr. in fig. 3 il caso di una particella che attraversa la prima

(*) In tal caso si dice che la particella è "in fase" con la p.s..

intercapedine all'istante p_1' , e quindi le successive agli istanti p_2' , p_3' ).

Si noti che è necessario scegliere il valore della d.d.p. V non troppo vicino al massimo di $U(t)$. Infatti se V fosse esattamente uguale a tale massimo tutte le particelle andrebbero perdute, perchè durante l'oscillazione di fase verrebbero a trovarsi prima o poi nel quarto di periodo in cui il campo decresce. D'altra parte V non può essere troppo piccolo, altrimenti le particelle sono poco accelerate. In genere si sceglie V prossimo alla metà della tensione di cresta.

Dato che le particelle utilizzate si raggruppano in pacchetti attorno alla p.s., il funzionamento della macchina è pulsato.

Si noti che la lunghezza dei cilindri dovrà progressivamente aumentare per permettere alle particelle di attraversarli sempre nello stesso tempo (mezzo periodo dell'oscillazione del generatore) nonostante l'aumento di velocità. Tuttavia quando le particelle sono fortemente relativistiche, cioè la loro velocità è praticamente uguale a quella della luce, la lunghezza dei tubi diviene costante ed uguale a $c/2\sqrt{\nu}$, (ν frequenza del generatore). Finchè invece le particelle obbediscono alla meccanica classica si può vedere che la lunghezza dei tubi cresce proporzionalmente alla radice quadrata dei numeri interi.

I vantaggi che presenta l'uso degli acceleratori lineari sono: la notevole intensità del fascio, la buona collimazione, la facilità di estrazione delle particelle. D'altra parte il fascetto non è molto omogeneo in energia, e la messa a punto della macchina è assai critica.

In pratica gli acceleratori lineari moderni, pur funzionando secondo il meccanismo esposto, presentano spesso uno schema costruttivo alquanto diverso da quello mostrato in fig. 2. Non vi sono più cilindri separati, ma questi sono saldati insieme

in modo da formare un unico tubo metallico in cui si inseriscono dei diaframmi pure metallici. Lungo tale tubo (guida d'onda) si fanno propagare onde elettromagnetiche di altissima frequenza (microonde: $\nu \sim 10^9 - 10^{10}$ hertz) il cui campo elettrico serve ad accelerare le particelle. I diaframmi hanno la stessa funzione dei cilindri nello schema di fig. 2. Maggiori dettagli verranno dati in seguito.

Acceleratori lineari sono usati comunemente nella regione di energia sotto a 100 - 200 MeV; solo eccezionalmente si sono costruiti acceleratori lineari per elettroni di 600 MeV. Le difficoltà per raggiungere energie più alte sono solo di carattere pratico. (Contorno 173 - 177)
184)

§ I-6. Ciclotrone

In questa macchina le particelle sono accelerate da un campo elettrico a radiofrequenza (dell'ordine di 10 - 30 Mhz), ma invece di muoversi lungo una retta, come negli acceleratori lineari, esse percorrono una traiettoria a spirale, guidate da un campo magnetico costante.

Le particelle si muovono in una camera a vuoto a forma di cilindro piatto, che racchiude due elettrodi cavi la cui forma si può immaginare ottenuta tagliando un cilindro cavo molto appiattito lungo un suo piano diametrico (v. fig. 4a). Per tale forma essi vengono chiamati "D". Tra essi viene applicata la d.d.p. a radio frequenza. Nell'intercapedine si genera un campo elettrico alternato, mentre all'interno dei D il campo elettrico è nullo.

La camera a vuoto è posta tra le espansioni polari di un grosso elettromagnete (v. fig. 4b), il quale produce un campo magnetico costante e (quasi) uniforme, perpendicolare al piano

dei D. Al centro della camera a vuoto è situata la sorgente S di ioni, che escono con velocità molto bassa. Essi vengono accelerati dal campo elettrico e penetrano nell'interno di una delle D. Qui compiono con velocità costante una traiettoria semicircolare per effetto del campo magnetico, e si trovano nuovamente a passare per l'intercapedine. Se il campo elettrico si è nel frattempo invertito, essi vengono ancora accelerati e percorrono nell'altra D un semicerchio di raggio superiore al precedente (cfr. (I.2.16)), e così di seguito. In definitiva l'orbita risulta del tipo di quella indicata in fig. 4a. Tale funzionamento della macchina è possibile se il tempo che le particelle impiegano a percorrere ogni semicerchio è praticamente costante, e se la frequenza ν della r.f. è scelta in modo che il suo periodo sia il doppio di tale tempo.

Il tempo di transito τ per un semicerchio di raggio R percorso con velocità v è $\frac{\pi R}{v}$. D'altra parte R è dato, per la (I.2.16), da

$$R = \frac{P}{|q|B} = \frac{m_v v}{|q|B} \quad (I.6.1)$$

Quindi

$$\tau = \frac{\pi m_v}{|q|B} \quad (I.6.2)$$

e

$$\nu = \frac{|q|B}{2\pi m_v} \quad (I.6.3)$$

Si vede che ν dipende dall'energia attraverso m_v ; tuttavia, fino a che le particelle soddisfano l'approssimazione classica, $m_v \simeq m$ e $\tau \simeq \text{cost.}$ Dalla condizione (I.2.11) $T \ll E_0$, ne segue che la macchina può accelerare le particelle solo fino ad energie cinetiche piccole (1-2%) rispetto all'energia di riposo; perciò essa non è utilizzabile per elettroni. Se l'energia cinetica sale a valori non trascurabili rispetto a E_0 , via via che la massa aumenta, i passaggi attraverso l'intercapedine sono

ν diminuisce

quindi ν cambia con E

sempre più distanziati; quindi la particella incontra il campo elettrico in una fase sempre più arretrata, finché non lo trova diretto in verso opposto al suo moto, e viene ritardata anziché accelerata. Per questa ragione il limite pratico d'impiego del ciclotrone è di circa 20 MeV per protoni o deutoni. Entro questi limiti d'energia i ciclotroni sono indicati per l'alta intensità del fascio che possono fornire ($\sim 100 \mu A$).

Il raggio della camera a vuoto è legato al valore dell'energia massima ottenibile attraverso la relazione

$$R_{max} = \frac{m_p v_{max}}{|q| B} = \frac{\sqrt{2 m_p T_{max}}}{|q| B} \quad (I.6.4)$$

Questa relazione può dare un'idea delle dimensioni necessarie per i poli del magnete; infatti i campi magnetici che si realizzano in pratica sono dell'ordine di 10^4 gauss = 1 weber/m². Per esempio, per protoni di 10 MeV, con $B = 1$ weber/m² si ha $R=45$ cm; per deutoni di 20 MeV, $R = 90$ cm.

~~Osserviamo~~ infine che il ciclotrone si può concettualmente assimilare ad un acceleratore lineare del tipo di fig. 2, in cui però la traiettoria è avvolta a spirale per effetto del campo magnetico, e quindi i successivi elettrodi sono sostituiti da due soli, ripetutamente attraversati.

§ I.7. Sincrociclotrone

Il sincrociclotrone, o ciclotrone a frequenza modulata, è una variante del ciclotrone che permette di superare il limite dell'energia imposto in questo dalla variazione relativistica della massa.

In linea di massima la costruzione di questa macchina è analoga a quella del ciclotrone. La differenza fondamentale è che la frequenza dell'oscillatore a r.f. è modulata, cioè è fatta variare periodicamente, e la macchina è usata nei semi-

$\gamma \alpha$
 m_0

accelerazione
 $m \rightarrow \gamma \alpha$
 \Rightarrow Ch. Tammont

$\gamma = \frac{v}{2\pi R}$

periodi in cui essa va diminuendo. In questo modo si può ottenere che la relazione (I.6.3) continui a valere anche quando la massa aumenta con l'energia, e quindi il tempo impiegato a percorrere un semicerchio entro le D cresce. ^{$\Rightarrow \gamma = \frac{v}{2\pi R}$} (Si potrebbe pensare che la variazione della frequenza debba seguire rigorosamente una legge determinata. Fortunatamente questo non è necessario, perchè, qualunque sia la legge di variazione della frequenza (purchè decrescente in modo sufficientemente lento) esiste sempre una particella per la quale vale in ogni istante la (I.6.3) (particella sincrona): siccome poi vale, anche qui, un "principio di stabilità di fase" analogo a quello che abbiamo esposto per gli acceleratori lineari, le altre particelle, purchè comprese in un certo intervallo intorno alla particella sincrona, oscillano intorno a questa accompagnandola nel suo moto a spirale. In questa macchina dunque le particelle non sono disseminate lungo tutta la traiettoria come nel ciclotrone, ma formano un unico "pacchetto" che parte dal centro e si muove, descrivendo una fitta spirale, a velocità crescente: i pacchetti partono dal centro con un ritmo pari al ritmo di modulazione della frequenza (dell'ordine di 100 al secondo) e quindi il fascio prodotto dalla macchina è pulsato con questo ritmo. Questo fatto riduce notevolmente l'intensità media del fascio rispetto al ciclotrone.

il pto. a rto
e. ch. c'è
la massa
L'azione

Un'altra importante differenza pratica tra il ciclotrone ed il sincrociclotrone è che in quest'ultimo le particelle compiono un numero di giri assai maggiore (dell'ordine di 10.000 anzichè di 100) ossia descrivono una spirale molto più serrata: è quindi possibile usare una tensione acceleratrice molto minore (dell'ordine di 10 anzichè di 100 kV).

Il raggio dei poli del magnete è dato dalla formula

$$R_{max} = \frac{P_{max}}{|q|B} = \frac{1}{c|q|B} \sqrt{T_{max}^2 + 2E_0 T_{max}} \quad (I.7.1)$$

$$\sqrt{E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4} \Rightarrow c^2 p^2 = E^2 - m_0^2 c^4 = T^2 + m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 T - m_0^2 c^4 = T^2 + 2E_0 T \Rightarrow p = \frac{1}{c} \sqrt{T_{max}^2 + 2E_0 T_{max}}$$

che nell'approssimazione classica ($T \ll E_0$) si riduce alla (I.6.4), valida per il ciclotrone.

Il limite massimo dell'energia è imposto essenzialmente da considerazioni economiche che fanno preferire, per alte energie, il sincrotrone. Al CERN (Ginevra) è stato realizzato un sincrociclotrone da 600 MeV.

I sincrociclotroni non sono indicati per accelerare elettroni, perchè questi richiederebbero una modulazione di frequenza troppo ampia. -b 168-170

§ I-8. Sincrotrone

In un sincrociclotrone la parte più costosa è il magnete. Poichè il raggio del magnete è legato all'energia finale delle particelle dalla (I.7.1), la mole ed il costo del magnete raggiungono valori proibitivi per energie superiori a qualche centinaio di MeV. Si è quindi pensato di costruire, per energie maggiori, delle macchine in cui le particelle siano ancora accelerate da un campo elettrico a r.f., ma siano costrette a percorrere un'orbita circolare anzichè a spirale. In questo modo è sufficiente realizzare il campo magnetico solo nella regione dell'orbita, e non nello spazio da essa racchiuso. Il costo di tale magnete "anulare" è circa proporzionale al raggio, mentre per un magnete ad espansioni circolari è circa proporzionale al cubo del raggio.

Nel sincrotrone, poichè le particelle percorrono un'orbita fissa, la camera a vuoto si costruisce a forma di toro (ciambella) come nel betatrone. Il campo elettrico a r.f. che accelera le particelle è localizzato in un punto della ciambella ed è ottenuto creando delle onde elettromagnetiche stazionarie in una scatola metallica (cavità risonante) attraversata dalla ciambella.

Il tempo di rivoluzione T è dato da $T = \frac{2\pi R}{v}$] $v = c\beta$
 $\Rightarrow T$ diminuisce all'aumentare di v | R aumenta all'aumentare di v

La pulsazione ω della r.f. deve essere tale che il corrispondente periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ sia uguale (o sottomultiplo) al tempo impiegato dalla particella a percorrere un giro dell'orbita. Poichè tale tempo diminuisce al crescere dell'energia, la frequenza dovrà essere modulata (ω crescente), ma tenderà ad un limite fisso (c/R) col tendere della velocità a c .

Per mantenere le particelle su un'orbita fissa di raggio R anche quando l'energia aumenta, il campo magnetico deve essere variabile: dalla (I.2.16) si vede che esso deve crescere proporzionalmente alla quantità di moto P della particella.

D'altra parte deve anche essere (cfr. (I.2.7)) $m v = m \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} m_0 c$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m v} = \frac{|q|B E_0}{m_0 E} \quad T_{E_0} = \frac{E}{P_0} = 1 \Rightarrow \text{(I.8.1)}$$

Esprimendo E in funzione di P e quindi di B attraverso le (I.2.8), (I.2.16), si trova il seguente legame tra ω e B :

$$\omega = \frac{|q|B}{m \sqrt{1 + \left(\frac{c q B R}{E_0}\right)^2}} \quad \text{(I.8.2)}$$

In pratica si fa variare B secondo una legge temporale periodica prestabilita, e ω secondo la (I.8.2). La funzione $\omega(B)$ ha l'andamento indicato in fig. 5

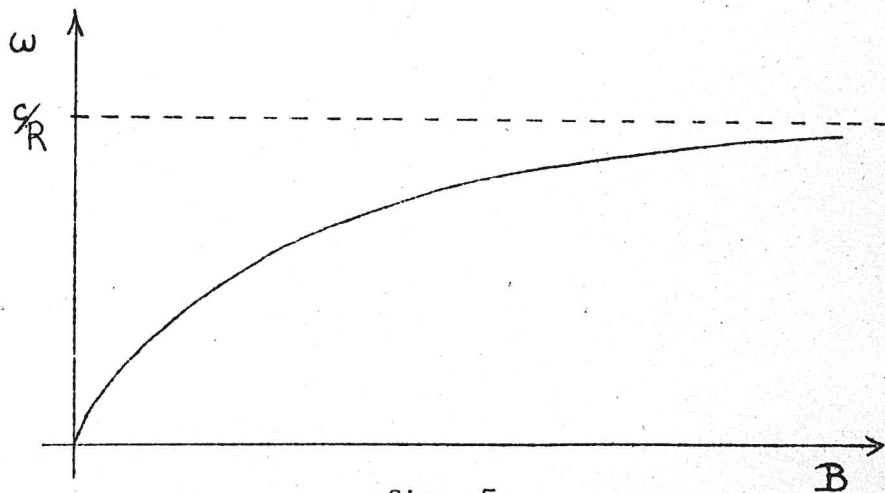


fig. 5

Se la (I.8.2) è seguita, le particelle vengono a trovarsi sempre sulla stessa orbita circolare, pur essendo accelerate ad ogni giro, purchè il valore della tensione della cavità a r.f. sia scelto in modo opportuno, come verrà specificato più dettagliatamente in seguito (§ V-2, e 5).

Si ricordi che non è necessario che la (I.8.2) sia verificata rigorosamente, poichè anche nel sincrotrone vale il principio della stabilità di fase. Si può definire come per l'acceleratore lineare una particella sincrona intorno alla quale le altre si raggruppano in pacchetti. Il sincrotrone quindi ha un funzionamento pulsato con il periodo del campo magnetico.

Affinchè i limiti di modulazione della r.f. non siano troppo ampi, si preferisce iniettare le particelle nella macchina dopo averle accelerate ad una energia di alcuni MeV (di solito per mezzo di un acceleratore elettrostatico).

Il magnete consiste di due espansioni polari a forma di anello ed il circuito magnetico è chiuso attraverso una parete verticale di ferro, così che la sezione del magnete ha una forma somigliante ad una "C" (v. fig. 6).

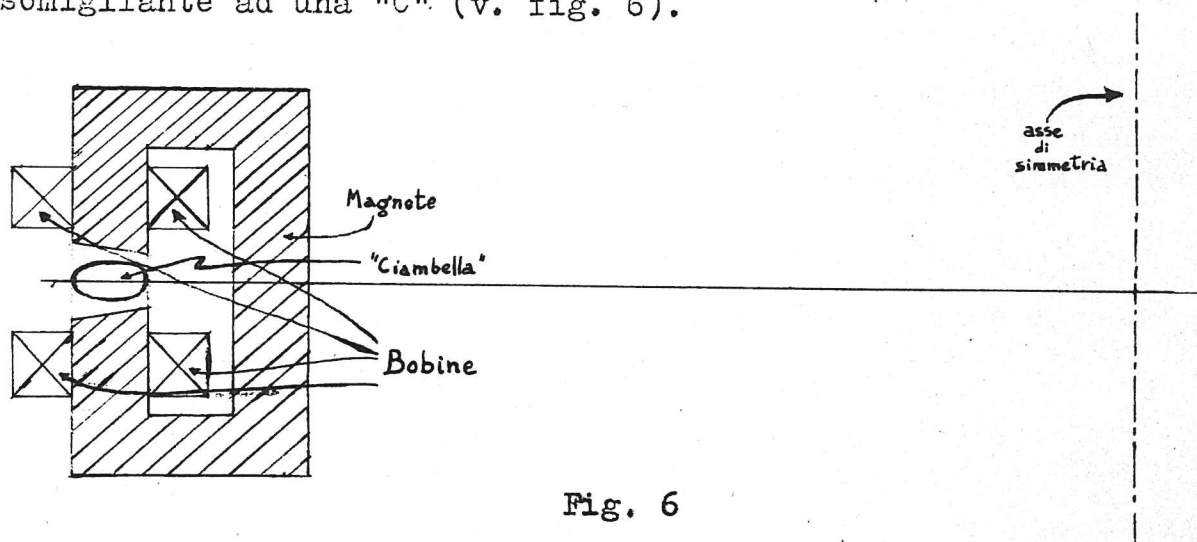


Fig. 6

In generale le bobine del magnete sono alimentate con corrente alternata a bassa frequenza, o con una eccitazione a dente di sega, e si utilizza la macchina ~~solo~~ mentre B cresce, come è stato già detto.

In pratica la macchina è progettata in modo che alcuni tratti della ciambella siano privi di campo magnetico e rettilinei. In generale questi tratti sono quattro, alternati ad altrettanti archi di cerchio della lunghezza di un quarto di circonferenza (v. fig. 7). Il sincrotrone così modificato si chiama "race-track". Le sezioni diritte sono molto utili perchè in esse possono essere collocati più comodamente tutti gli impianti accessori della macchina. In generale in un tratto diritto si mette

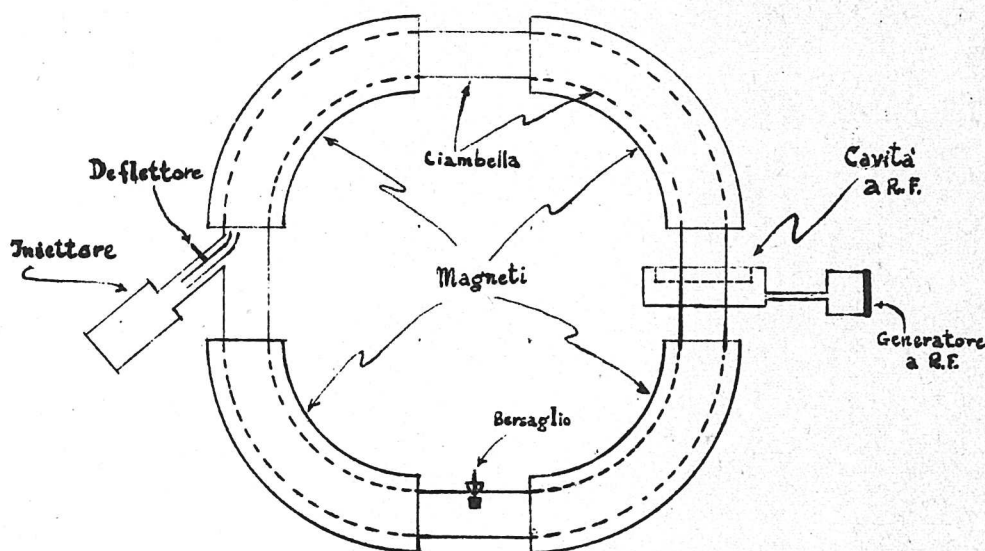


Fig. 7

la cavità a r.f., in un altro il bersaglio; in un terzo tratto si iniettano le particelle che, provenienti dall'acceleratore elettrostatico, vengono deviate per mezzo di un deflettore (di solito elettrostatico) che le immette nella ciambella tangenzialmente al suo asse, solamente durante un tempo opportuno nella fase in cui B cresce.

I sincrotroni sono indicati solo per le altissime energie, per le quali sono il solo tipo di macchina economicamente possibile. Attualmente sono in funzione un numero limitato di tali macchine, ed altre ancora sono in progetto. I dati relativi alle più importanti sono riportati nel paragrafo seguente.

86-95

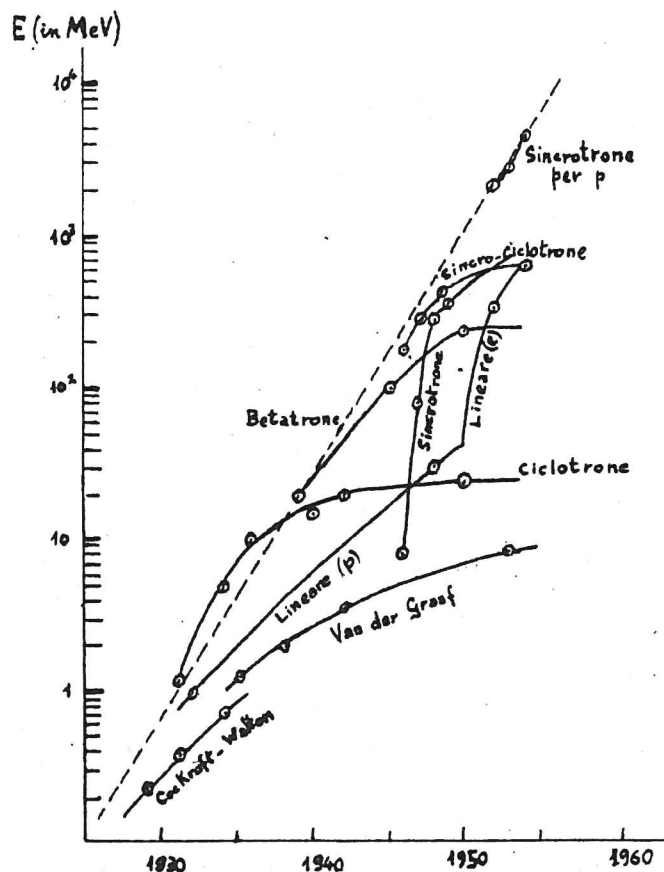
Micronin pg 164

§ I-9. Caratteristiche di alcune macchine tipiche

Riportiamo nella tabella che si trova alla pagina seguente i dati più interessanti relativi ad alcune macchine dei vari tipi, per dare un'idea delle prestazioni comunemente ottenibili. Non includiamo quindi le macchine aventi qualche caratteristica eccezionale, ma piuttosto dei buoni "tipi standard" per ogni genere di macchina. Soltanto per i sincrotroni, che sono pochi, ed hanno ciascuno delle caratteristiche particolari, diamo più di un esempio.

Diamo ora anche un interessante grafico (fig. 8) (*) indicante l'energia raggiunta con le macchine acceleratrici, in funzione del tempo. I punti relativi allo stesso tipo di macchina sono congiunti con una linea. Come si vede, l'andamento è crescente, di tipo esponenziale (linea tratteggiata).

fig. 8



(*) Da: LIVINGSTON - High Energy Accelerators - Interscience Publ., New York, 1954 (pag. 151).

TABELLA DELLE PRESTAZIONI

Tipo di macchina	Luogo e nome	Tipo particelle accelerate	Energ. finale (MeV)	Energ. di iniez.	Intensità del fascio (μ A)	Dimensione (\star)	Data di inizio funzionamento
Acc.elett. Van de Gr.	Columbia University	Ioni pos.	5.5	-	25	3.6 m	1955
Acc.elett. Cockr.Wal.	Istituto di Sanità Roma	p,d	1.1	-	600	3 m	1939
Acc.lineare	U.C.R.L.	p	32	4 MeV	0.1	12 m	1947
Betatrone	Univ. of California Los Alamos	e	24	60 KeV	0,02 (10^9 el/imp 180 imp/sec)	38 cm	1950
Ciclotrone	Nobel Inst. Phys. Stoccolma	p d α	25(d) 50(α)	-	250	2.25 m	1951
Sincrociclotrone	Un.Uppsala (Svezia)	p	192	-	1.0	2.30 m	1951
Sincrotrone	Univ. of Michigan	e	350	0.5 MeV	$3 \cdot 10^{-5}$ (10^7 el/imp 20 imp/sec)	2 m	1952
Sincrotrone	Frascati	e	1000	2.5 MeV (20 imp/sec)	7.2 m	in cost. 1958
Sincrotrone	Brookhaven (Cosmotrone)	p	2900	3.6 MeV	$3 \cdot 10^{-2}$ (10^{11} prot/imp 12 imp/min)	18 m	1952
Sincrotrone	Berkeley (Bevatrone)	p	6000	9.8 MeV	$3 \cdot 10^{-3}$ (10^{10} prot/imp 10 imp/min)	30 m	1954
Sincrotrone	CERN Ginevra	p	25000	50 MeV	$2 \cdot 10^{-4}$ ($5 \cdot 10^9$ prot/imp 12 imp/min)	200m	in cost. 1958

(\star) Per acceleratori elettrostatici e lineari qui è riportata la lunghezza; per betatroni e sincrotroni il diametro dell'orbita; per ciclotroni e sincrociclotroni il diametro dei poli del magnete.

8 I-10. Sorgenti di particelle

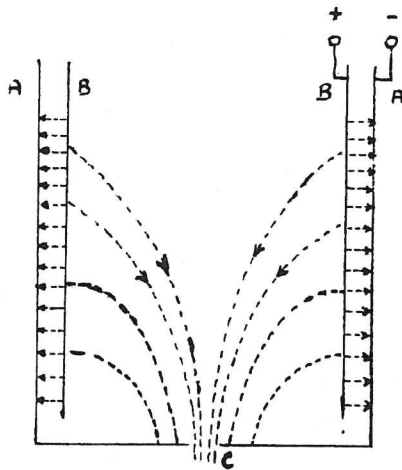


Fig. 9

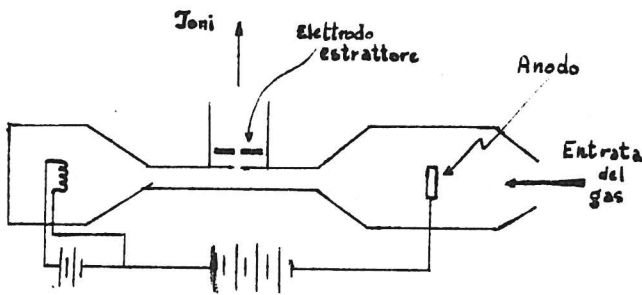


Fig. 10

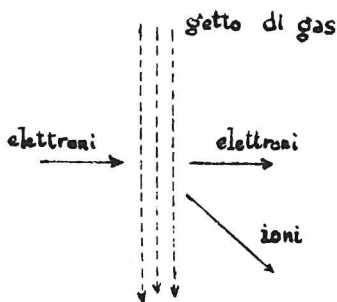


Fig. 11

Tutte le macchine finora descritte richiedono una "sorgente" che fornisca le particelle cariche da accelerare.

Se queste sono elettroni, la sorgente si può realizzare semplicemente mediante un filamento incandescente; gli elettroni emessi per effetto termoionico, sono estratti e focalizzati da uno o più elettrodi, e poi immessi nella macchina.

Nel caso di ioni positivi, essi vengono prodotti per urto di elettroni contro le molecole di un gas. Il gas da ionizzare viene immesso in una camera dove la ionizzazione può essere provocata in diverse maniere: si hanno così le sorgenti ad alta tensione, a bassa tensione, a radiofrequenza, ad elettrodi oscillanti, che ora passiamo a descrivere.

Nelle sorgenti ad alta tensione il gas è ionizzato per mezzo di una scarica a bagliore prodotta tra due elettrodi da

una d.d.p. elevata (10-20 kV). Il più semplice ed antico tipo di sorgente ad alta tensione è un tubo a raggi canale. Tuttavia questa sorgente presenta il difetto che l'energia delle particelle immesse nella macchina varia a seconda del punto di produzione degli ioni, e che l'intensità ottenuta è piccola.

Una variante dovuta ad Oliphant è indicata schematicamente in fig. 9. A e B sono due elettrodi cilindrici concentrici tra cui è mantenuta la d.d.p. di 10-20 kV. La scarica a bagliore non avviene nell'intercapedine tra i due cilindri perchè la distanza non è sufficiente per permettere la moltiplicazione necessaria per l'innesco. Essa avviene invece tra B e la base di A che presenta un foro C. Poichè le linee di forza del campo elettrico (indicate schematicamente in figura) si addensano in vicinanza di C, la ionizzazione che si ottiene è forte. L'energia è abbastanza omogenea, poichè la ionizzazione avviene praticamente soltanto nella zona vicina a C.

Le sorgenti ad alta tensione sono talvolta d'impiego disagiata, come per esempio nel caso degli acceleratori elettrostatici, in cui la sorgente va posta all'interno dell'elettrodo ad alta tensione. Si possono allora usare sorgenti a bassa tensione (~ 100 V) nelle quali si produce la ionizzazione per mezzo di una scarica ad arco. Nell'arco il catodo emette elettroni per effetto termoionico e l'intensità di corrente è molto superiore che nella scarica a bagliore; la ionizzazione è forte, e gli ioni vengono estratti da un elettrodo laterale a potenziale leggermente negativo. In generale esso è disposto in corrispondenza di una strozzatura del tubo in cui avviene la scarica ad arco, ove la densità ionica è superiore (v. fig. 10).

Queste sorgenti sono relativamente omogenee in energia, ma hanno l'inconveniente di una vita breve (alcune ore) del filamento, per il bombardamento a cui esso è sottoposto.

Le sorgenti ad elettroni oscillanti funzionano secondo il meccanismo seguente: si accelera un fascetto di elettroni che si fa collidere con un getto di gas la cui densità locale sia abbastanza alta. Nell'urto avviene la ionizzazione: gli ioni prodotti sono estratti da un elettrodo a potenziale negativo. (Il fenomeno è schematizzato in fig. 11). Il rendimento può essere aumentato facendo "oscillare" più volte gli elettroni attraverso il getto. Generalmente si applica anche un campo magnetico costante (prodotto da magneti permanenti o da elettromagneti) diretto parallelamente al moto degli elettroni; esso muta le traiettorie elettroniche in spirali, aumentando così il percorso, e quindi il numero degli urti.

Il filamento non è sottoposto a bombardamento, e non si deteriora così rapidamente come nel caso delle sorgenti a bassa tensione.

Vi sono diverse maniere di realizzare praticamente una sorgente di ioni basata su questo principio^(*). Descriviamo qui la sorgente di Heil e Von Ardenne (fig. 12).

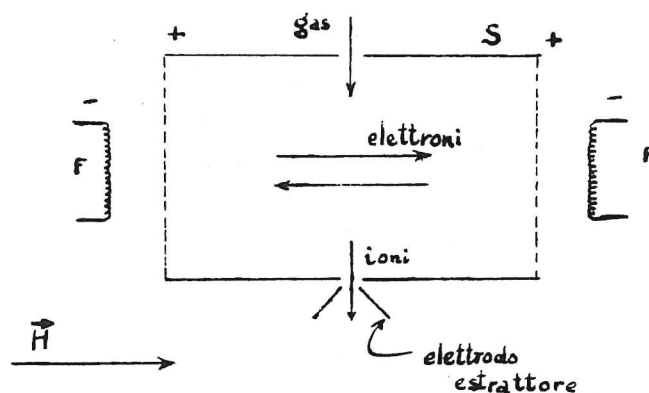


Fig. 12

(*) V. Handbuch der Physik, vol. XXXIII, pag. 57.

Essa consiste di due filamenti incandescenti F che emettono elettroni, e di una scatola metallica S mantenuta ad un potenziale positivo rispetto ad essi. Le pareti della scatola affacciate ai filamenti sono aperte, sì da permettere il passaggio degli elettroni; da un foro capillare della scatola fluisce il getto di gas da ionizzare; un campo magnetico \vec{H} è disposto parallelamente alla direzione di moto degli elettroni. Gli elettroni emessi da uno dei filamenti vengono accelerati dalla d.d.p. tra filamento e scatola, e producono la ionizzazione delle molecole del gas: la loro energia quindi diminuisce, e non è più sufficiente a far loro superare il controcampo tra la scatola e l'altro filamento: gli elettroni sono quindi respinti indietro, ed iniziano una serie di oscillazioni smorzate nell'interno della scatola. In condizioni di regime l'effetto di carica spaziale in vicinanza dei filamenti mantiene costante l'intensità del fascetto elettronico.

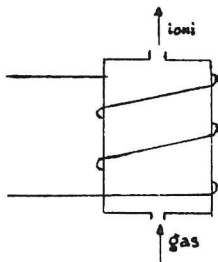


Fig. 13a

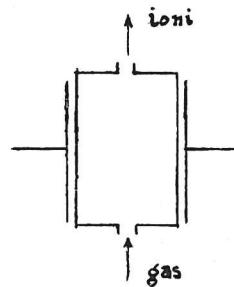


Fig. 13b

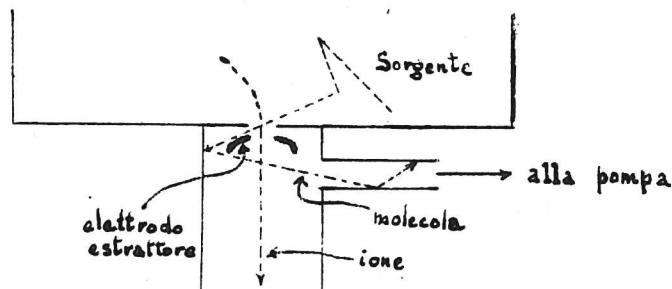


Fig. 14

Nelle sorgenti a radiofrequenza il gas è ionizzato da onde hertziane di alta frequenza. Queste sono prodotte da un circuito oscillante, in cui sono sempre presenti un'induttanza ed una capacità. Il tubo contenente il gas da ionizzare si può allora porre nell'interno della bobina (fig. 13a) o tra le armature del condensatore (fig. 13b).

In entrambe queste zone il campo elettromagnetico è molto intenso. In questo modo tra l'altro si evita l'effetto catalizzatore dei metalli per la ricombinazione degli ioni.

In tutti i tipi di sorgente la pressione è bassa ($\sim 10^{-2}$ mmHg), ma è sempre notevolmente più alta che nel resto della macchina ($\lesssim 10^{-5}$ mmHg). Per questo si ha un continuo flusso di gas dalla sorgente all'acceleratore, e quindi la sorgente deve essere continuamente rifornita di gas. Per impedire il deterioramento del vuoto all'interno della macchina acceleratrice, si fa il foro di estrazione piuttosto piccolo e si inserisce all'uscita di esso una pompa a diffusione. Questa aspira di preferenza le molecole neutre del gas, le quali si muovono esclusivamente del moto irregolare dovuto all'agitazione termica, mentre lascia passare gli ioni che, per l'accelerazione prodotta dall'elettrodo estrattore, hanno una forte componente di velocità lungo l'asse del tubo (pompaggio differenziale: v. fig. 14).

In generale nei diversi tipi di sorgente si cercano di ottenere le seguenti caratteristiche:

- 1) Elevata intensità della corrente di ioni;
- 2) Alta percentuale di ioni atomici rispetto agli ioni molecolari;
- 3) Ioni omogenei in energia;
- 4) Piccolo consumo di gas (è necessario cioè che sia piccola la quantità di gas che fluisce nel tubo e viene portata via dalla pompa) specialmente nel caso di deuterio, dato il suo prezzo elevato;

- 5) Basso consumo di energia elettrica, specialmente nel caso in cui tale energia debba essere fornita da generatori racchiusi, insieme alla sorgente, in uno spazio limitato (elettrodo superiore degli acceleratori elettrostatici);
- 6) Vita lunga, cioè possibilità di funzionare a lungo senza ricambi o riparazioni.

Facciamo osservare infine che nel caso dei ciclotroni le sorgenti di ioni, per il fatto di trovarsi al centro della macchina, dove sono presenti forti campi elettrici e magnetici, hanno delle caratteristiche particolari. Di esse ci occuperemo più dettagliatamente in seguito (§ VII-8).

CAPITOLO II

ACCELERATORI ELETTROSTATICI

§ II-1. Il tubo acceleratore

Gli acceleratori elettrostatici consistono essenzialmente di due parti: il generatore di alta tensione ed il tubo acceleratore. I vari tipi di macchine elettrostatiche differiscono per il generatore, mentre il tubo acceleratore ha sempre le stesse caratteristiche.

Il tubo acceleratore (fig. 15) è di solito costituito da una serie di tubi cilindrici di vetro ai quali sono intercalati degli anelli metallici. Questi sono collegati elettricamente tra loro attraverso resistenze elevate, in modo da realizzare una caduta di tensione uniforme lungo il tubo. Senza questo accorgimento, durante il funzionamento della macchina alcune parti

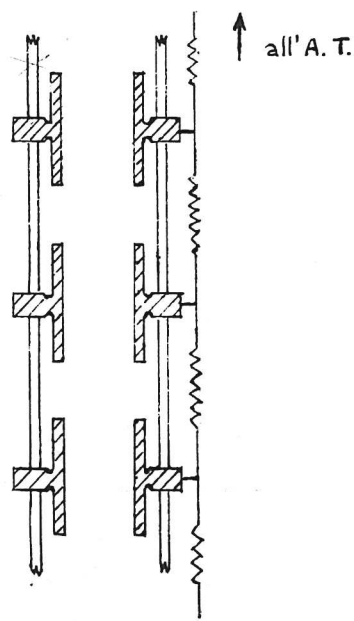


Fig. 15

celle potrebbero accumularsi sulle pareti e dar luogo a campi elettrici locali, che potrebbero far deviare il fascetto e generare scariche. Gli anelli, oltre che distribuire uniformemente la caduta di tensione lungo il tubo hanno un effetto focalizzante sul fascetto, come sarà spiegato fra breve. Generalmente tali "anelli" sono, all'interno del tubo, prolungati da cilindri metallici in modo che sia difficile per le particel

le di raggiungere la superficie del vetro. E' ancora da osservare che la presenza degli anelli contribuisce ad aumentare la resistenza meccanica del tubo acceleratore. La congiunzione tra metallo e vetro è di solito assicurata per mezzo di mastici opportuni, poichè la saldatura diretta tra vetro e metallo è difficile: ciò nonostante essa è stata tentata in alcuni casi.

Si noti anche che le resistenze segnate in fig. 15 a volte non sono veri e propri "elementi resistivi", ma la loro funzione è assunta da una debole corrente di effluvio tra un anello ed il successivo.

Per comprendere l'effetto focalizzante degli anelli si osservi la fig. 16, dove E_1 , E_2 rappresentano elettrodi cilindrici a potenziali diversi e le linee tratteggiate sono linee di forza del campo elettrico.

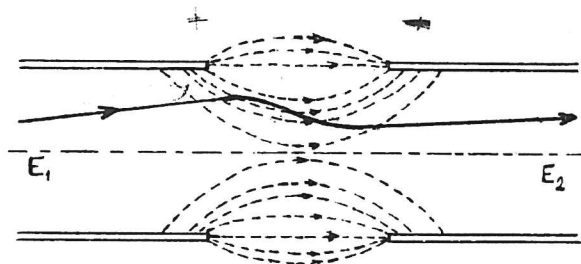


Fig. 16

Supponiamo ora che una particella carica positivamente attraversi l'intercapedine da E_1 verso E_2 ; essa è soggetta oltre che alla componente del campo lungo l'asse anche ad una piccola componente trasversale, diretta verso l'asse in E_1 ed in senso opposto in E_2 . Quindi la particella è soggetta ad una azione focalizzante all'ingresso, defocalizzante all'uscita; tuttavia, poichè la particella nel passaggio è accelerata, l'azione focaliz

zante agisce per un tempo maggiore e quindi è più efficace. (Una traiettoria dimostrativa è indicata nella stessa fig. 16).

Per lo studio completo delle traiettorie di una particella carica in un campo elettrostatico è stato sviluppato un procedimento di calcolo noto sotto il nome di Ottica Elettronica. Si sfrutta l'analogia esistente tra il moto di una particella (di carica q) in un campo elettrostatico (descritto da un potenziale $V(x,y,z)$) ed il percorso di un raggio luminoso in un mezzo non omogeneo di indice di rifrazione variabile $n(x,y,z)$. Più precisamente si dimostra che (finchè si resta nell'ambito della meccanica classica) la traiettoria della particella e del raggio luminoso coincidono se si assume per n la forma

$$n(x,y,z) = k \sqrt{C - qV(x,y,z)} \quad (\text{II.1.1})$$

ove C è una costante uguale all'energia totale della particella, e k è una costante, che non influisce sulla forma della traiettoria. In meccanica relativistica la (II.1.1.) è sostituita da un'altra formula.

In questa analogia un dispositivo del tipo di quello indicato in fig. 16 si chiama una lente elettronica. Per ciascuna di tali "lenti" si può definire una distanza focale, e si trova che essa aumenta con l'energia cinetica della particella.

Il tubo acceleratore agisce dunque come un sistema di più lenti, che deve formare sul bersaglio un'immagine del foro di uscita delle particelle dalla sorgente. Poichè l'energia cinetica delle particelle aumenta lungo il tubo, solo le prime lenti hanno una effettiva azione focalizzante. In pratica è sufficiente regolare le tensioni e la forma delle prime due lenti, in modo da ottenere sul bersaglio un'immagine quanto più piccola è possibile del foro di uscita della sorgente.

Un altro fattore di cui si deve tener conto è l'effetto di carica spaziale. Se il fascetto è molto intenso la repulsione elettrostatica delle particelle tende ad allargarlo, producendo una certa defocalizzazione. Questo effetto è importante solo nelle prime fasi dell'accelerazione, poichè quando la velocità è sufficientemente alta la repulsione elettrostatica è in parte compensata da un'attrazione di carattere elettromagnetico (come se le particelle in moto si potessero assimilare a correnti parallele: effetto sensibile solo a velocità relativistiche).

Allo scopo di correggere la defocalizzazione dovuta alla carica spaziale si sagoma il primo elettrodo (elettrodo estrattore) in forma leggermente concava, in modo da introdurre una piccola componente trasversale del campo elettrico che tende a portare le particelle verso l'asse.

Questa azione compensa la defocalizzazione dovuta alla carica spaziale. La forma più opportuna da dare all'elettrodo è stata studiata da Pierce^(*).

(*) PIERCE - Theory and design of electron beams - Van Nostrand Co., New York, 1954, cap. X.

§ II-2. Generatore di Van de Graaff.

In questo tipo di macchina (illustrata schematicamente in fig. 17) si sfrutta l'effetto dell'effluvio delle punte.

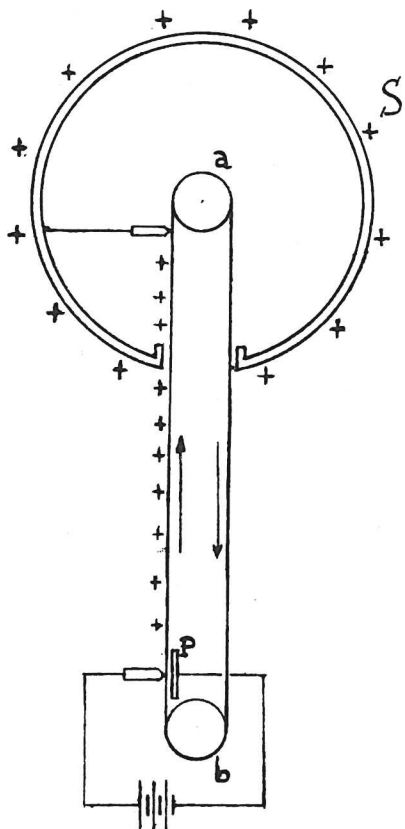


Fig. 17

Una cinghia di materiale isolante scorre tra due pulegge (a,b) di cui l'inferiore b è mossa da un motore. In vicinanza di questa puleggia è affacciato un elettrodo a punta, mantenuto ad un potenziale costante, non troppo elevato (~ 10.000 volt), che per fissare le idee supporremo positivo rispetto alla piastra P.

La punta perde per effluvio cariche positive che si vanno a depositare sulla cinghia in moto (*).

La puleggia superiore a è posta all'interno di un grande elettrodo sferico isolato S.

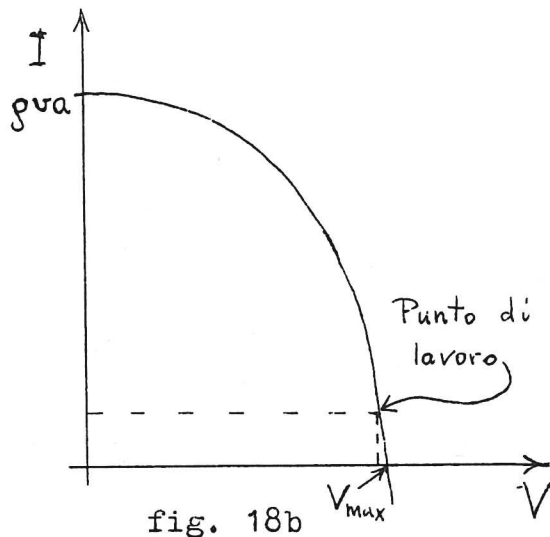
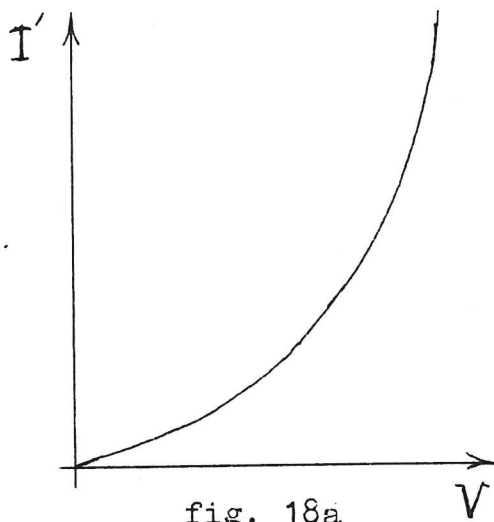
Qui si trova una seconda punta che preleva le cariche positive trasportate dalla cinghia; tali cariche si accumulano progressivamente sulla superficie esterna dell'elettrodo, che così aumenta il suo potenziale. Questo elettrodo è collegato direttamente con il tubo acceleratore: in esso si trova la sorgente di ioni, e spesso una pompa da vuoto.

(*) L'espressione "la punta perde (preleva) cariche per effluvio" è in realtà una forma tradizionale un po' semplicistica. Per una più realistica descrizione del fenomeno v. AMALDI, Fisica Sperimentale, Cap. II § 30.

Quando la macchina è in funzione l'elettrodo ad alta tensione (A.T.) eroga una corrente, che è dovuta in parte al moto delle particelle accelerate ed in parte ad una corrente di effluvio verso terra, soprattutto lungo il tubo acceleratore (cfr. § precedente). D'altra parte l'elettrodo è alimentato dalla corrente dovuta alle cariche trasportate dalla cinghia; tale corrente è uguale a $v\rho a$ (v , velocità della cinghia; ρ , densità superficiale di carica; a , larghezza della cinghia). Dette I e I' rispettivamente la corrente del fascetto e quella d'effluvio^(*), in condizioni di regime si avrà

$$I + I' = \rho va \quad (\text{II.2.1})$$

Poichè la dipendenza di I' dalla tensione V dell'elettrodo è del tipo illustrato in fig. 18a, dalla (II.2.1) si vede che la dipendenza di I da V è quella indicata in fig. 18b. Il valore $V = V_{\max}$



corrisponde alla tensione esistente quando non sono accelerate particelle ($I \neq 0$). In pratica la macchina lavora in una regione dove V è poco minore di V_{\max} e I è molto minore di ρva , ma (data la forte pendenza della curva di fig. 18b) non troppo piccola.

(*) In I' è compresa anche una debole corrente di conduzione attraverso gli isolanti che sostengono l'elettrodo ad A.T.

Le grandezze di ρ , v , a sono limitate da ragioni di carattere pratico. In genere $v < 25$ m/sec, $a < 20$ cm. Il valore di a può essere aumentato servendosi di più cinghie in parallelo disposte in modo opportuno così da limitare al massimo le perdite per effluvio.

In queste macchine la principale limitazione al valore della tensione massima dell'elettrodo è imposta dal fatto che, quando il campo elettrico alla superficie dell'elettrodo supera un certo valore (rigidità dielettrica dell'aria), avvengono delle scariche tra l'elettrodo stesso e le pareti dell'ambiente che contiene la macchina. Proprio per ridurre al minimo il campo elettrico a parità di potenziale, si costruisce l'elettrodo a forma sferica o ellissoidica. Naturalmente per una fissata forma dell'elettrodo al campo elettrico che produce la scarica corrisponde un valore del potenziale detto potenziale esplosivo V_{exp} ; la macchina deve essere progettata in modo che $V_{max} < V_{exp}$.

Allo scopo di aumentare la rigidità dielettrica del mezzo in cui si trova l'elettrodo ad A.T. si racchiude tutta la macchina in un involucro in cui è contenuto un gas inerte (per es. freon C Cl_2F_2) alla pressione di 10-15 atmosfere. Infatti per una data geometria degli elettrodi il potenziale esplosivo dipende solo dal prodotto $p\ell$ della pressione del gas per la distanza degli elettrodi (legge di Paschen). Riferendoci a due elettrodi piani e paralleli in aria si trova che la curva $V_{exp} = f(p\ell)$ ha l'andamento mostrato in fig. 19.

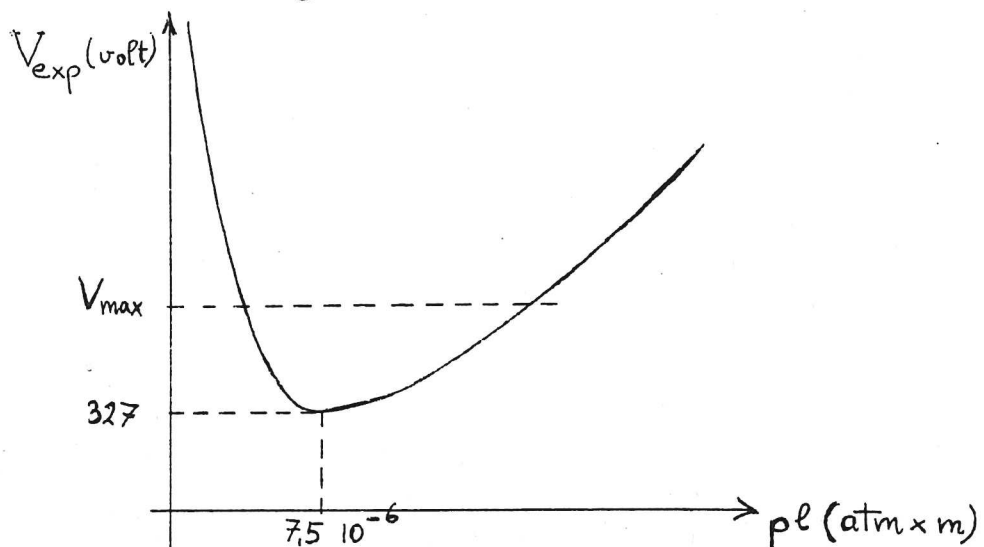


fig. 19

L'andamento di V_{exp} per valori molto alti o molto bassi di p , una volta fissato ℓ , si può comprendere considerando il meccanismo della scarica. Questa avviene in seguito alla ionizzazione delle molecole del gas da parte degli elettroni accelerati dal campo elettrico. Ad alte pressioni il cammino libero medio degli elettroni è minore, e quindi è necessaria una tensione maggiore per comunicare ad essi l'energia necessaria per la ionizzazione. A basse pressioni invece la ionizzazione è bassa perchè, anche se in un cammino libero medio l'elettrone acquista l'energia necessaria a ionizzare, gli urti che danno luogo a ionizzazione sono pochi, in quanto nel tratto ℓ sono compresi pochi cammini liberi medi (eventualmente meno di uno).

Si vede da fig. 19 che per un fissato valore di ℓ si possono scegliere due pressioni, una alta ed una bassa, tali da realizzare la condizione $V_{\text{exp}} > V_{\text{max}}$. Nelle macchine esistenti si è preferito ricorrere all'alta pressione che dal punto di vista pratico è di realizzazione più semplice. Non è escluso che, con il progredire delle tecniche necessarie, si possa in futuro ricorrere alle bassissime pressioni.

Sempre allo scopo di ridurre il campo elettrico a parità di potenziale si può interporre tra l'elettrodo ad A.T. e l'involucro esterno contenente il gas altri elettrodi concentrici al primo, a potenziali intermedi. Si dimostra facilmente che il campo elettrico massimo (alla superficie dell'elettrodo interno) diminuisce.

Per vedere questo, schematizziamo l'elettrodo interno e l'involucro come sfere concentriche tra cui esiste una d.d.p. V_0 e calcoliamo il valore massimo del campo elettrico.

Nella zona tra gli elettrodi il potenziale ha la forma

$$V(r) = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}} \quad (\text{II.2.2})$$

ove r_0 è il raggio interno e R il raggio esterno.

Indichiamo con E_m il valore massimo del campo elettrico tra gli elettrodi, raggiunto alla superficie dell'elettrodo interno. Sarà

$$E_m = - \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=r_0} = \frac{V_0}{r_0 (1 - r_0/R)} \quad (\text{II.2.3})$$

Variando la geometria degli elettrodi E_m varia. La geometria più favorevole è quella in cui E_m è minimo; ciò si ottiene per $r_0 = R/2$, come si vede subito annullando la derivata prima della (II.2.3) rispetto a r_0 . Detto E^* tale valore minimo si avrà

$$E^* = 4V_0/R \quad (\text{II.2.4})$$

Se si introduce un terzo elettrodo sferico concentrico (a potenziale V_1 e di raggio r_1) compreso tra l'involucro e l'elettrodo ad A.T., si ha, come prima, che il campo alla superficie di esso è minimo per $r_1 = R/2$, ed analogamente il campo alla superficie dell'elettrodo centrale è minimo per $r_0 = r_1/2 = R/4$. Questo vale per qualunque V_1 ; infatti l'elettrodo intermedio a potenziale fisso ha una funzione di schermo elettrostatico che rende completamente indipendenti tra loro i campi delle due parti di esso. Fissata così la geometria, V_1 va scelto in modo da rendere uguali i valori di E^* alle superfici dei due elettrodi, che si ottengono da espressioni del tipo della (II.2.3). Si trova $V_1 = 2V_0/3$, ed $E^* = \frac{8}{3} \frac{V_0}{R}$, valore inferiore a quello dato dalla (II.2.4).

L'utilità di questa riduzione consiste nel fatto che, per fis

sate dimensioni del generatore (cioè per R fissato), V_0 si può innalzare fino a che $E^* = E_{\text{scarica}}$, cioè fino a $V_0 = \frac{3}{8} RE_{\text{scarica}}$ (invece che $V_0 = \frac{1}{4} RE_{\text{scarica}}$, come nel caso di assenza di schermo).

Un metodo più rigoroso consiste nello scrivere le espressioni

$$E_1 = \frac{V_1}{r_1 \left(1 - \frac{r_1}{R}\right)} \quad E_2 = \frac{V_0 - V_1}{r_0 \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)}$$

del campo elettrico alle superfici esterne dei due elettrodi di raggio r_0 ed r_1 , determinare V_1 in modo da renderle uguali e poi rendere minimo il loro comune valore annullando le derivate parziali rispetto a r_0 e r_1 . Si trova che il minimo si ha per

$$r_0 = \frac{1}{2} r_1, \quad r_1 = \frac{5}{8} R, \quad V_1 = \frac{3}{5} V_0$$

ed in tali condizioni

$$E^* = E_1 = E_2 = \frac{64}{25} \frac{V_0}{R}$$

Questi risultati differiscono poco da quelli trovati precedentemente con procedimento più rapido.

Se si mettono più schermi concentrici a potenziali opportuni si può diminuire ulteriormente il valore del campo E^* . Tuttavia il vantaggio è sempre minore, cosicché in genere non si usano più di due schermi, tenuti ai potenziali voluti mediante connessione con gli anelli metallici del tubo acceleratore.

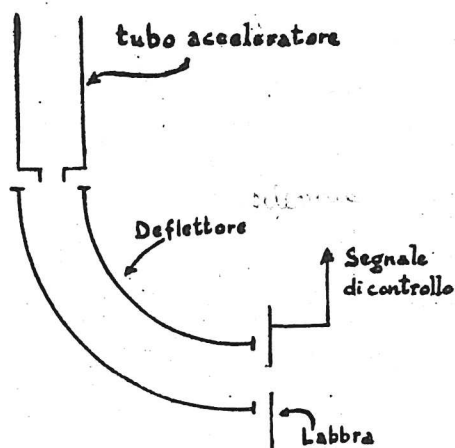


Fig. 20

All'uscita del tubo acceleratore si pone talvolta un deflettore (fig. 20) elettrostatico oppure magnetico, il quale ha la funzione di evitare che possano giungere sul bersaglio particelle diverse da quelle volute, sia per massa che per energia. Si può fare in modo che il deflettore possa essere utilizzato per la stabilizzazione della A.T.. A questo scopo l'uscita del deflettore è formata da una

te vanno a cadere le particelle quando una fluttuazione della tensione fa deviare il fascetto dalla direzione voluta. Dalle labbra si può prelevare quindi un segnale che può essere utilizzato per riportare la tensione al valore di regime. Ciò può essere realizzato in diversi modi:

- 1) variando la tensione dell'alimentatore della cinghia;
- 2) variando la corrente dissipativa I' ;
- 3) variando il potenziale V_1 dello schermo intermedio.

Il primo metodo fa effetto con un certo ritardo (tempo di salita della cinghia). Gli altri due metodi sono più rapidi. Il secondo può essere realizzato (per acceleratori di ioni) inserendo all'estremità inferiore del tubo un filamento incandescente che emette elettroni, i quali sono attratti dall'elettrodo ad A.T. e producono una corrente dissipativa la cui intensità può essere regolata.

Per misurare la A.T. può essere usato il voltmetro generatore. Esso consiste sostanzialmente in un condensatore variabile a due piatti sagomati opportunamente, affacciati all'elettrodo ad A.T.

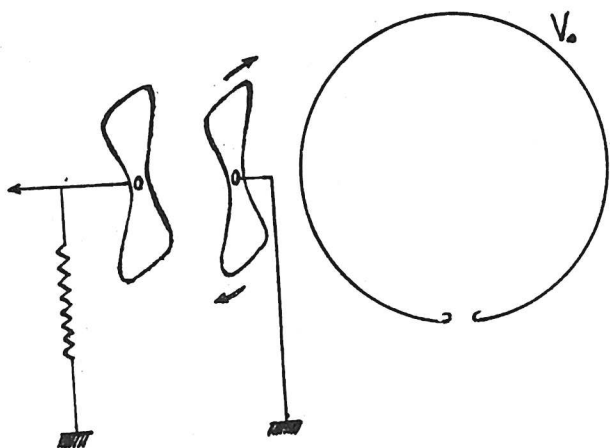


Fig. 21

(fig. 21). Il piatto più vicino a questo è posto in rotazione da un motorino ed è collegato a terra. L'altro piatto è fisso ed è collegato a terra attraverso una resistenza elevata. Si può dimostrare che la tensione ai capi di tale resistenza è alternata e di ampiezza rigorosamente proporzionale alla tensione V_0 dell'elettrodo.

Per questa sua proprietà la taratura dello strumento può essere effettuata anche a basse tensioni. La corrente che attraversa lo strumento può essere a sua volta utilizzata per la stabilizzazione di V_0 .

§ II-3. Generatore di Cockroft e Walton

Cockroft e Walton hanno realizzato un generatore di alta tensione sviluppando il cosiddetto moltiplicatore di tensione di Greinacher.

Il loro generatore (che fu il primo usato per produrre reazioni nucleari) è costituito da due colonne di condensato

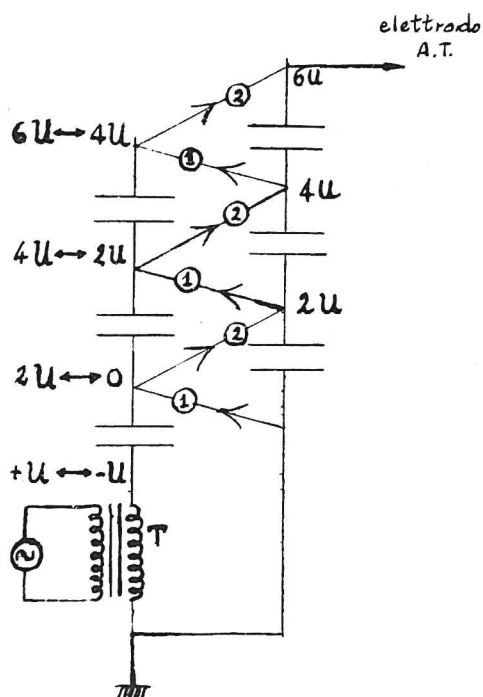


Fig. 22

ri (v. fig. 22) collegati in serie e connessi da una catena di diodi che permettono alla corrente di passare solo nella direzione indicata dalle frecce. Il generatore è alimentato da un trasformatore T, è capace di produrre una tensione alternata $U(t)$ con valore di cresta U (ordine di grandezza 100 kV). Se non si preleva corrente dall'elettrodo ad A.T. si può vedere che dopo un periodo iniziale transitorio si raggiunge uno stato di regime in cui tutti i condensatori (meno il primo) sono carichi a potenziale $2U$; i potenziali degli elettrodi dei condensatori di destra sono fissi, mentre quelli dei condensatori di sinistra oscillano tra i limiti indicati in fig. 22. In queste condizioni i diodi non conducono corrente. Se per qualche ragione questo stato viene alterato i diodi conducono una corrente che tende a ristabilirlo.

Durante il funzionamento della macchina si preleva dall'elettrodo ad A.T. una corrente I . In questo caso tutte le tensioni sono leggermente diminuite e fluttuano secondo una legge che ora ricaveremo.

Indichiamo con n il numero dei condensatori di ciascuna colonna; con C_r, C'_r ($r = 1, 2, \dots, n$) le capacità rispettivamente dei condensatori di destra e di sinistra, numerati a partire dall'alto; con $u_r(t)$ la tensione alle armature del condensatore C_r . Chiamiamo d_1 i diodi che conducono dalla colonna di destra a quella di sinistra, e d_2 gli altri.

In fig. 23 è riportato qualitativamente l'andamento di $u_r(t)$ in corrispondenza a $U(t)$. (In ordinate sono usate scale diverse).

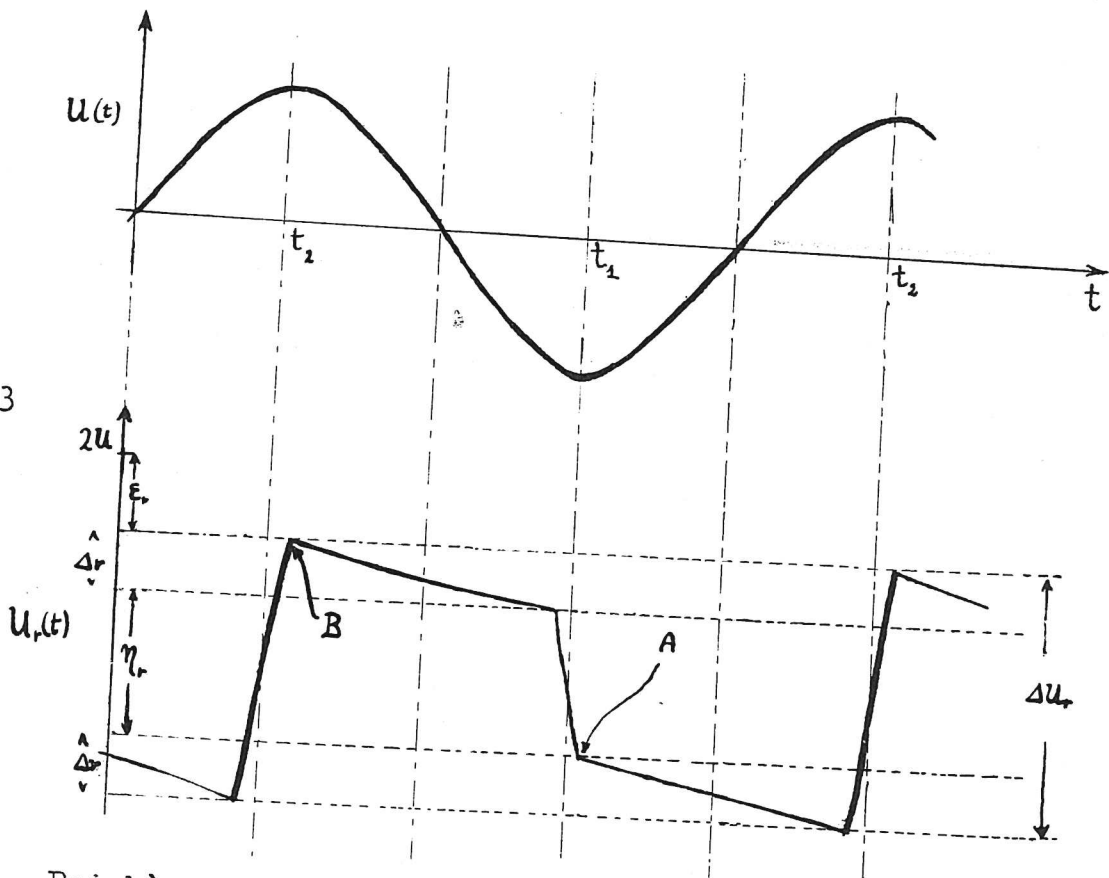


Fig. 23

Poichè, come abbiamo detto, tutti i condensatori si trovano caricati ad una d.d.p. di poco minore che in assenza di prelevamento di corrente, quando la tensione $U(t)$ cresce ed arriva vicino al massimo si vede che le armature^(*) dei condensatori C'_r si vengono a trovare a potenziali superiori a quelli delle armature dei condensatori C_r , cosicchè attraverso i diodi d_2 passa, per un tempo breve intorno all'istante t_2 , una corrente che in definitiva aumenta la $u_r(t)$ secondo la fig. 23.

(*) Quando ...

Durante il semiperiodo successivo tutta la colonna di destra si scarica, con costante di tempo elevatissima, sul carico (tubo acceleratore), e la tensione $u_r(t)$ diminuisce esponenzialmente. In vicinanza del minimo di $U(t)$ (istante t_1) le armature dei C_r vengono a trovarsi a potenziale superiore rispetto alle armature dei C'_{r-1} , cosicchè ora conducono i diodi d_1 e la tensione $u_r(t)$ cala bruscamente. Nel successivo semiperiodo la colonna di destra seguita ad erogare corrente e la tensione diminuisce ancora, fino a che, al successivo istante di massimo, t_2 , essa ritorna rapidamente al valore iniziale.

In definitiva la tensione $u_r(t)$ non è costante, ma fluttua intorno ad un valore inferiore a $2U$ con ampiezza Δu_r .

Indichiamo con ε_r l'abbassamento della tensione massima rispetto a $2U$, con Δ_r la diminuzione in un semiperiodo, con η_r la diminuzione all'istante t_1 . Si avrà $\Delta u_r = \eta_r + 2\Delta_r$. Calcoliamo ora queste grandezze.

In condizioni di regime la carica q che viene erogata dai condensatori in un periodo T è sempre $q = IT$. Quindi la variazione di tensione in un semiperiodo, cioè Δ_r , sarà data da

$$\Delta_r = \frac{q}{2C_r} = \frac{IT}{2C_r} \quad (\text{II.3.1})$$

Per il calcolo di η_r si consideri la fig. 24. La carica che si

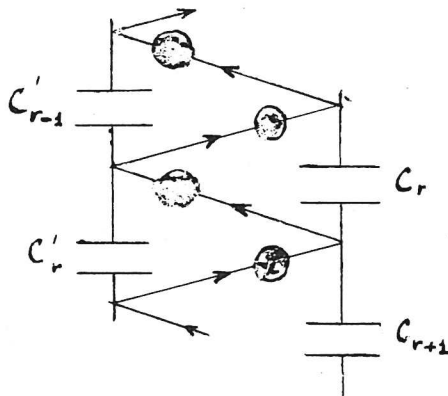


Fig. 24

trova sull'armatura di C_{r+1} (che è sia armatura positiva di C_{r+1} che armatura negativa di C_r) è $C_{r+1}u_{r+1} - C_r u_r$. La variazione di questa carica all'istante t_1 è $C_{r+1}\eta_{r+1} - C_r \eta_r$ ed è uguale alla carica che in tale istante lascia l'armatura e passa, attraverso il diodo d_1 , nella colonna di sinistra. Tale carica è proprio q . Quindi si ha la formula ricorrente

$$C_{r+1} \eta_{r+1} - C_r \eta_r = q \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II.3.2})$$

Poichè $\eta_1 = 0$ (infatti C_1 non carica ulteriori condensatori della colonna di sinistra) sommando membro a membro le prime s equazioni (II.3.2) con $r = 1, 2, \dots, s$ si ottiene $C_s \eta_s = (s-1)q$ da cui

$$\eta_s = \frac{(s-1)q}{C_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II.3.3})$$

Si avrà quindi $\Delta u_s = \eta_s + 2\Delta_s = s \frac{q}{C_s}$. La fluttuazione del potenziale dell'elettrodo ad A.T. sarà perciò

$$\Delta u = \sum_1^n \Delta u_s = q \sum_1^n \frac{s}{C_s} \quad (\text{II.3.4})$$

Se le capacità dei condensatori sono tutte eguali

$$\Delta u = \frac{n(n+1)}{2} \frac{q}{C} = \frac{n(n+1)}{2} \frac{I}{C\nu} \quad (\nu = \frac{1}{T}) \quad (\text{II.3.5})$$

Si vede che la fluttuazione cresce circa come n^2 e che su questa hanno la massima influenza i condensatori più vicini al trasformatore. Convien quindi che questi siano quanto più grandi è possibile. In pratica si usano due valori di capacità, il più piccolo per i condensatori più alti ed il più grande per i condensatori più bassi.

Per calcolare l'abbassamento di tensione ϵ_r è utile considerare un diagramma analogo a quello di fig. 23, rappresentante la tensione $u'_r(t)$ alle armature di C'_r (fig. 25).

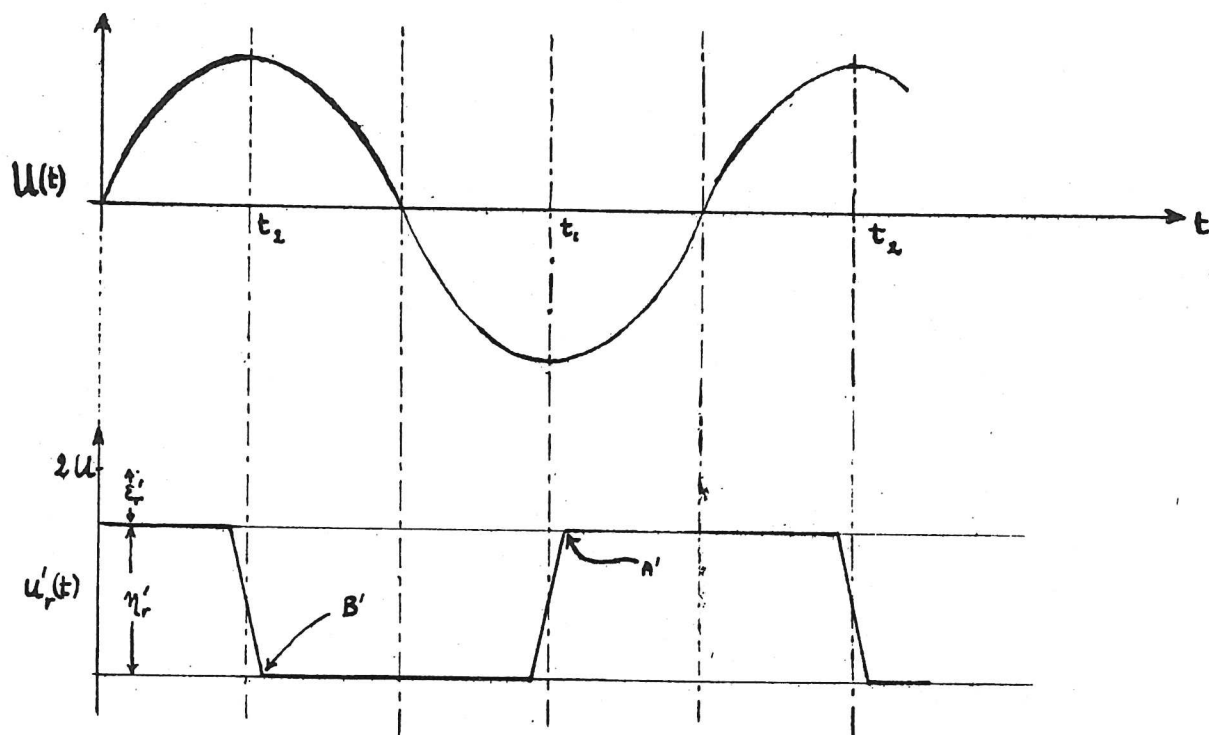


Fig. 25

Ci si può convincere che la $u'_r(t)$ ha l'andamento indicato in fig. 25, notando che agli istanti t_2 , mentre i C_r si caricano (v. fig. 23), i C'_r si scaricano, e viceversa agli istanti t_1 . Inoltre durante un semiperiodo la tensione resta costante perchè dai C'_r non si preleva la corrente I che dà luogo agli abbassamenti di tensione Δ_r di fig. 23. All'istante t_1 i diodi d_1 conducono e i condensatori C_r e C'_{r-1} si vengono a trovare in parallelo (cfr. fig. 24), cosicché quando i diodi cessano di condurre le tensioni alle armature sono uguali. Ciò significa che le ordinate dei punti A e A' nelle figg. 23 e 25 devono essere uguali. Ciò implica

$$2U - \varepsilon_r - \Delta_r - \eta_r = 2U - \varepsilon'_{r-1} \quad (\text{II.3.6})$$

Un ragionamento analogo per l'istante t_2 (punti B e B') fornisce

$$2U - \varepsilon_r = 2U - \varepsilon'_r - \eta'_r \quad (\text{II.3.7})$$

Riscrivendo la (II.3.7) per l'indice $r-1$, sostituendo a Δ_r il suo valore $q/2C_r$, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon'_{r-1} - \eta_r - \frac{q}{2C_r} \\ \varepsilon_{r-1} &= \eta'_{r-1} + \varepsilon'_{r-1} \end{aligned} \quad (\text{II.3.8})$$

da cui per differenza segue (cfr. (II.3.3) valida anche per i condensatori C'_s):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_{r-1} &= -\eta_r - \eta'_{r-1} - \frac{q}{2C_r} = -\frac{r-1}{C_r} q - \frac{r-1}{C'_{r-1}} q - \frac{q}{2C_r} = \\ &= q \left(\frac{1}{2C_r} - \frac{r}{C_r} - \frac{r-1}{C'_{r-1}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.3.9})$$

Se scriviamo questa relazione per tutti i valori di r , da $r=2$ a $r=t$, e sommiamo i primi ed i secondi membri, otteniamo:

$$\varepsilon_t - \varepsilon_1 = q \sum_{r=2}^t \left[\frac{1}{2C_r} - \frac{r}{C_r} - \frac{r-1}{C'_{r-1}} \right] \quad (\text{II.3.10})$$

Scrivendo la (II.3.10) per $t=n$, e sottraendo membro a membro da questa equazione la (II.3.10) stessa, si ha

$$\varepsilon_n - \varepsilon_t = q \sum_{t+1}^n \left[\frac{1}{2C_r} - \frac{r}{C_r} - \frac{r-1}{C'_{r-1}} \right] \quad (\text{II.3.11})$$

Occorre ora calcolare ε_n che rappresenta l'abbassamento di tensione del condensatore più basso della colonna di destra. A questo scopo si consideri la fig. 26. All'istante t_2 , quando il diodo d_2 ha finito di condurre (punti B e B' di fig. 23 e 25), la tensione alle armature di C_n è uguale alla somma della tensione alle armature di C'_n e del trasformatore T, cioè $u_n = u'_n + U$, da cui

$$2U - \varepsilon_n = U - \eta'_n + U \quad (\text{II.3.12})$$

Notiamo infatti che C'_n è caricato a tensione U anziché $2U$, e che $\varepsilon'_n = 0$ poichè il condensatore è caricato direttamente dal trasformatore attraverso il diodo d_1 e non presenta quindi abbassamento. Segue allora che (cfr. (II.3.3))

$$\varepsilon_n = \eta'_n = \frac{nq}{C'_n} \quad (\text{II.3.13})$$

e sostituendo nella (II.3.11) otteniamo infine

$$\mathcal{E}_t = q \left[\sum_{t+1}^n \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{C_r} + \sum_t^n \frac{r}{C'_r} \right] \quad (\text{II.3.14})$$

Quindi l'abbassamento dell'A.T. $\Delta V_o = \sum_{t=1}^n \mathcal{E}_t$ è dato da

$$\Delta V_o = q \sum_{t=1}^n \left[\sum_{t+1}^n \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{C_r} + \sum_t^n \frac{r}{C'_r} \right] \quad (\text{II.3.15})$$

Se tutte le capacità sono uguali ($C_r = C'_r = C$) si ottiene

$$\Delta V_o = \frac{q}{C} \left(\frac{2}{3} n^3 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{12} n \right) \quad (\text{II.3.16})$$

da cui si vede che l'abbassamento cresce circa come il cubo del numero degli stadi. Convien quindi ridurre il numero degli stadi ed usare un trasformatore con elevata tensione di cresta.

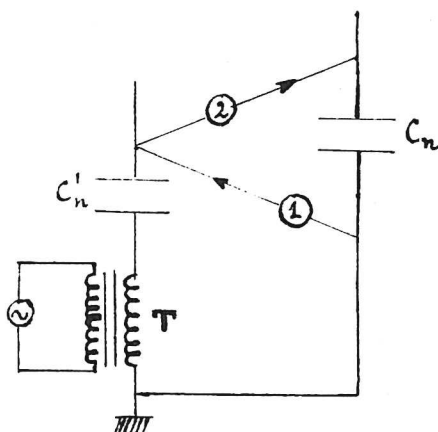


Fig. 26

Poichè ΔV_o , proporzionale a q , è inversamente proporzionale alla frequenza dell'alimentatore, è conveniente usare alte frequenze. In pratica non si sale al disopra di frequenze dell'ordine di 500 hertz, perchè altrimenti diventano sensibili effetti di capacità parassite.

In certi moderni generatori di Cockroft e Walton si usano, invece dei diodi, raddrizzatori a selenio. Questi hanno il vantaggio di non richiedere alimentazione (mentre i diodi vanno alimentati separatamente, lavorando a tensioni assai diverse) e possono essere inclusi senza difficoltà in camere a pressione.

Per tutto ciò che riguarda l'elettrodo ad A.T. valgono le stesse considerazioni già esposte nel paragrafo precedente per il generatore di Van de Graaff. In un confronto tra i due tipi di generatore notiamo che il Van de Graaff permette di raggiungere tensioni più elevate ed assicura una maggiore stabilità dell'energia delle particelle (fino a 0,01%); il Cockroft e Walton invece permette di ottenere una maggiore intensità (fino a circa 10000 μ A per elettroni e 3000 μ A per protoni contro 500 μ A e 20 μ A rispettivamente), ma la sua tensione presenta fluttuazioni generalmente dell'ordine dell'1%.

CAPITOLO III

DINAMICA DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ III-1. Caso generale

Un generico campo elettromagnetico può essere descritto, oltre che in termini dei vettori \vec{E} , campo elettrico, e \vec{B} , induzione magnetica, anche attraverso il potenziale scalare $V(x,y,z,t)$ ed il potenziale vettore $\vec{A}(x,y,z,t)$, legati ai vettori precedenti dalle formule^(*):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}\end{aligned}\tag{III.1.1}$$

La forza agente su una particella di carica q e velocità \vec{v} è data da

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q\left(-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{A}\right)\tag{III.1.2}$$

e l'equazione della dinamica $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$ (cfr. (I.2.1)) si scrive

$$\dot{\vec{P}} = q\left(-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{A}\right)\tag{III.1.3}$$

Nel caso elettrostatico si può prendere $\vec{A} = 0$ e

$$\dot{\vec{P}} = -q \text{grad } V\tag{III.1.4}$$

Anche nel caso generale ci si può ridurre formalmente alla (III.1.4) con l'introduzione della cosiddetta "quantità di moto generalizzata"

$$\vec{P}^* = \vec{P} + q\vec{A}\tag{III.1.5}$$

Derivando rispetto al tempo questa relazione si ottiene, tenendo conto della (III.1.3)

$$\dot{\vec{P}}^* = q\left[-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{A} + \dot{\vec{A}}\right]\tag{III.1.6}$$

(*) - Vedi per es. BECKER, Teoria dell'Elettricità, Vol. I, § 71 (ove però sono usate unità del sistema di Gauss, mentre qui usiamo unità Giorgi).

Si noti che $\dot{\vec{A}}$ indica la derivata totale (o lagrangiana) di \vec{A} rispetto al tempo, definita da

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A} \quad (\text{III.1.7})$$

Per vedere come si può trasformare la (III.1.6), calcoliamone la prima componente (tenendo presente la (III.1.7))

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \dot{P}_x^* &= -\frac{\partial V}{\partial x} + v_y \text{rot}_z \vec{A} - v_z \text{rot}_y \vec{A} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x} + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-V + \vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned}$$

in quanto \vec{v} non dipende da x, y, z .

Calcolando in modo analogo le altre componenti, si trova che (\star)

$$\dot{\vec{P}}^* = -q \text{grad}(V - \vec{A} \cdot \vec{v}) \quad (\text{III.1.8})$$

Ne segue che la quantità di moto generalizzata \vec{P}^* soddisfa la stessa legge cui soddisferebbe la quantità di moto vera \vec{P} in un campo elettrostatico descritto dal potenziale $V^* = V - \vec{A} \cdot \vec{v}$ (non noto a priori perchè contiene \vec{v}).

Si noti che nella (III.1.8) l'operatore grad si riferisce alle coordinate spaziali contenute in V ed in \vec{A} , mentre \vec{v} va considerato a questo effetto come un vettore costante.

(\star) - La trasformazione della (III.1.6) nella (III.1.8) si può effettuare direttamente attraverso la seguente formula di calcolo vettoriale

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{C}) = \vec{A} \wedge \text{rot} \vec{C} + \vec{C} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{C} + (\vec{C} \cdot \text{grad}) \vec{A}$$

che per $\vec{C} \equiv \vec{v}$, che non è funzione del posto, si scrive

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{A} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{A} \quad (\text{III.1.7}')$$

Da (III.1.7'), (III.1.7) sostituite in (III.1.6) si ottiene (III.1.8).

§ III-2. Il campo elettromagnetico delle macchine acceleratrici

Nello studio delle macchine acceleratrici interessano particolarmente i campi elettromagnetici che hanno un asse di simmetria ed un piano di simmetria ad esso perpendicolare. Tale è, per esempio, il campo del betatrone, quello magnetico del ciclotrone, etc. ^(*)

Convieni quindi introdurre nelle nostre formule coordinate cilindriche r, ϑ, z , assumendo come asse z l'asse di simmetria e come piano $z=0$ il piano di simmetria.

Per di più tali campi sono generati da correnti che percorrono spire circolari "orizzontali" con centro sull'asse z . (Per semplicità di linguaggio supporremo sempre verticale l'asse di simmetria). Si escludono inoltre i campi elettrici prodotti da cariche; l'eventuale campo elettrico è prodotto solo per induzione. In pratica questo significa trascurare l'effetto di carica spaziale.

Data la simmetria rispetto all'asse, tutte le grandezze di campo sono indipendenti da ϑ . Si può anche vedere che nelle nostre condizioni $B_{\vartheta} = 0$ perchè la circuitazione di \vec{B} lungo un cerchio $z=\text{cost.}, r=\text{cost.}$, è uguale alla corrente concatenata con il cerchio, che è nulla.

Per quanto riguarda i potenziali \vec{A}, V ricordiamo ^(**) che essi si possono esprimere mediante le formule generali

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\tau} \frac{\vec{j}(t - \frac{s}{v})}{s} d\tau \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho(t - \frac{s}{v})}{s} d\tau \quad (\text{III.2.1})$$

ove s è la distanza tra l'elemento di volume $d\tau$ ed il punto potenziato, e ρ, \vec{j} sono le densità di carica e di corrente.

(*) Il campo ad alta frequenza dei D dei ciclotroni e quello delle cavità risonanti dei sincrotroni non rientrano, ovviamente, in questa trattazione.

(**) v. BECKER, loc.cit.

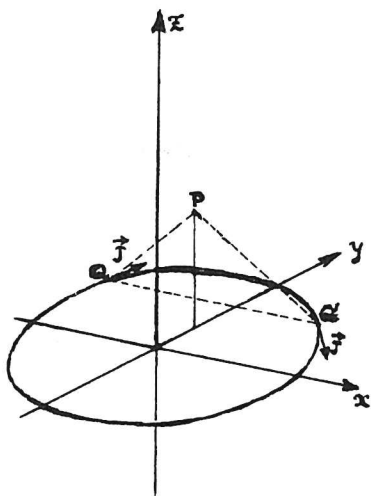


Fig. 27

Nelle nostre ipotesi è $j_z=0$ e $\mathcal{G}=0$; quindi dalle (III.2.1) segue $A_z=0$, $V=0$. Si può vedere che anche $A_r=0$. Infatti sia P il punto potenziato (fig. 27): si vede che nell'integrale di (III.2.1) tutti i contributi di coppie di punti come Q e Q', simmetrici rispetto al piano per P e l'asse z, danno luogo ad una componente radiale nulla. La sola componente di \vec{A} diversa da zero è A_ϑ che indicheremo con $A(r,z,t)$, funzione pari di z per la simmetria rispetto al piano $z=0$.

L'equazione $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ in coordinate cilindriche si esprime con

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial z}$$

$$B_\vartheta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (\text{III.2.2})$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}$$

che, con le condizioni imposte, divengono (indicando con l'apice la derivazione rispetto ad r)

$$B_r = - \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{III.2.3})$$

$$B_\vartheta = 0$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) = A' + \frac{A}{r} \quad (\text{III.2.4})$$

Il campo elettrico è dato da $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, cioè

$$E_r = E_z = 0 \quad E_\vartheta = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{III.2.5})$$

È utile calcolare il flusso di \vec{B} , $\Phi(r, z, t)$, concatenato con il cerchio generico $r = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$ Esso per la (III.2.4) è dato da

$$\Phi = \int_0^r B_z 2\pi r dr = 2\pi \int_0^r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) r dr = 2\pi r A \quad (\text{III.2.6})$$

Se si indica con $\overline{B_z}$ il valore medio di B_z nel cerchio considerato ($\Phi = \pi r^2 \overline{B_z}$), si ottiene

$$A = \frac{1}{2} r \overline{B_z} \quad (\text{III.2.7})$$

formula che dà un'espressiva interpretazione alla funzione A .

§ III-3. Dinamica di una particella carica nel campo elettromagnetico delle macchine acceleratrici

Nel caso di un campo elettromagnetico del tipo di quello descritto nel paragrafo precedente, le formule (III.1.5) e (III.1.8) si specificano rispettivamente nelle relazioni

$$P_r^* = P_r \quad P_\vartheta^* = P_\vartheta + qA \quad P_z^* = P_z \quad (\text{III.3.1})$$

$$\dot{P}^* = q \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) \quad (\text{III.3.2})$$

Nell'usare coordinate cilindriche, come facciamo, bisogna fare attenzione a distinguere, per qualsiasi vettore $\vec{K}(r, \vartheta, z, t)$ (in particolare per \vec{P}^*), fra \dot{K}_r (cioè $\frac{dK_r}{dt}$) e $(\dot{K})_r$ (cioè $(\frac{d\vec{K}}{dt})_r$), che in generale non coincidono: la stessa distinzione va fatta per la componente ϑ (non per la z). Infatti, detti $\vec{u}_r, \vec{u}_\vartheta$ i versori delle direzioni r, ϑ , si ha (*)

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \vartheta} = \vec{u}_\vartheta \quad \frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\vec{u}_r \quad (\text{III.3.3})$$

e anche

$$\frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.3.4})$$

Dalle (III.3.3) si ricava

$$\dot{\vec{u}}_r = \vec{u}_\vartheta \dot{\vartheta} \quad \dot{\vec{u}}_\vartheta = -\vec{u}_r \dot{\vartheta} \quad (\text{III.3.5})$$

Essendo

$$K_r = \vec{K} \cdot \vec{u}_r$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{K}_r &= \dot{\vec{K}} \cdot \vec{u}_r + \vec{K} \cdot \dot{\vec{u}}_r = (\dot{\vec{K}})_r + \dot{\vartheta} \vec{K} \cdot \vec{u}_\vartheta = \\ &= (\dot{\vec{K}})_r + \dot{\vartheta} K_\vartheta \end{aligned} \quad (\text{III.3.6})$$

(*) v. SIGNORINI, Meccanica Razionale, vol. I, cap. II, 14

e similmente

$$\dot{K}_\vartheta = (\dot{\vec{K}})_\vartheta - \dot{\vartheta} K_r \quad (\text{III.3.7})$$

$$\dot{K}_z = (\dot{\vec{K}})_z \quad (\text{III.3.8})$$

Nella (III.3.2) $\vec{A} \cdot \vec{v} = A \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta$; occorre applicare a questa grandezza l'operatore grad, le cui componenti in coordinate cilindriche sono $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial z})$; come già detto, \vec{v} va considerata come una costante. Tenendo presenti le (III.3.3), (III.3.4), e la ovvia relazione (data la simmetria cilindrica)

$$\frac{dA}{d\vartheta} = 0 \quad (\text{III.3.9})$$

si ottengono le relazioni seguenti:

$$\text{grad}_r(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial r}(A \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta) = A' \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta + A \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial r} = A' v_\vartheta \quad (\text{III.3.10})$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_\vartheta(\vec{A} \cdot \vec{v}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(A \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A}{\partial \vartheta} \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta + A \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right] = \\ &= -\frac{1}{r} A \vec{v} \cdot \vec{u}_r = -\frac{A v_r}{r} \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

$$\text{grad}_z(\vec{A} \cdot \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial z}(A \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta) = \frac{\partial A}{\partial z} \vec{v} \cdot \vec{u}_\vartheta + A \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{u}_\vartheta}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} v_\vartheta \quad (\text{III.3.12})$$

Le tre componenti della (III.3.2) sono allora, tenendo presenti le (III.3.6), (III.3.7), (III.3.8):

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{P}}^*)_r &= \dot{P}_r^* - \dot{\vartheta} P_\vartheta^* = q A' v_\vartheta \\ (\dot{\vec{P}}^*)_\vartheta &= \dot{P}_\vartheta^* + \dot{\vartheta} P_r^* = -q A \frac{v_r}{r} \\ (\dot{\vec{P}}^*)_z &= \dot{P}_z^* = q \frac{\partial A}{\partial z} v_\vartheta \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Per le (III.3.1) possiamo scrivere P_r e P_z al posto di P_r^* e P_z^* ; non esplicitiamo invece P_ϑ^* che gode di un'importante proprietà che ora dimostreremo.

Quindi le equazioni precedenti si possono scrivere

$$\dot{P}_r = q v_\vartheta A' + P_\vartheta^* \dot{\vartheta} \quad (\text{III.3.14})$$

$$\dot{P}_\vartheta^* = -q \frac{A}{r} v_r - P_r \dot{\vartheta} \quad (\text{III.3.15})$$

$$\dot{P}_z = q v_\vartheta \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{III.3.16})$$

Ricordiamo ora le seguenti immediate espressioni

$$v_r = \dot{r} \quad v_\vartheta = r \dot{\vartheta} \quad (\text{III.3.17})$$

$$P_r = m_v \dot{r} \quad P_\vartheta = m_v r \dot{\vartheta} \quad (\text{III.3.18})$$

e calcoliamo il momento rispetto all'asse z della quantità di moto generalizzata. Troveremo che questa grandezza

$$p = P_\vartheta^* r = r(P_\vartheta + qA) \quad (\text{III.3.19})$$

è una costante del moto. Infatti derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{p} = \dot{P}_\vartheta^* r + P_\vartheta^* \dot{r} = \left(-qA \frac{\dot{r}}{r} - \dot{\vartheta} m_v \dot{r}\right) r + \left(m_v r \dot{\vartheta} + qA\right) \dot{r} = 0 \quad (\text{III.3.20})$$

Nelle sostituzioni fatte si sono usate le (III.3.1), (III.3.15), (III.3.17) e (III.3.18).

Dalla (III.3.20), che esprime una proprietà analoga al principio della conservazione del momento della quantità di moto, si vede che p è una costante (determinata dalle condizioni iniziali) e che si può scrivere

$$P_\vartheta^* = \frac{p}{r} \quad (\text{III.3.21})$$

Per semplificare le equazioni del moto, definiamo ora la funzione $\mathcal{F}(r, z, t, p)$ mediante la seguente espressione

$$\mathcal{F}(r, z, t, p) = \frac{p}{r} - qA \quad (\text{III.3.22})$$

da cui

$$\mathcal{F}'(r, z, t, p) = -\frac{p}{r^2} - qA' \quad (\text{III.3.23})$$

In questo modo (cfr. (III.3.21)) si ottiene

$$P_{\vartheta} = m_r v_{\vartheta} = \mathcal{F} \quad (\text{III.3.24})$$

e le (III.3.14), (III.3.16) possono essere riscritte sotto la forma

$$\dot{P}_r = -\frac{1}{m_r} \mathcal{F} \mathcal{F}' \quad (\text{III.3.25})$$

$$\dot{P}_z = -\frac{1}{m_r} \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \quad (\text{III.3.26})$$

Facciamo infine osservare che le equazioni (III.3.14), (III.3.15), (III.3.16) si possono anche ottenere uguagliando le componenti della forza $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$,

$$\begin{aligned} F_r &= q v_{\vartheta} B_z \\ F_{\vartheta} &= q \left(v_z B_r - v_r B_z - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.3.27})$$

$$F_z = -q v_{\vartheta} B_r$$

alle corrispondenti componenti di $\dot{\vec{P}}$, cioè

$$(\dot{\vec{P}})_r = \dot{P}_r - P_{\vartheta} \dot{\vartheta}; \quad (\dot{\vec{P}})_{\vartheta} = \dot{P}_{\vartheta} + P_r \dot{\vartheta}; \quad (\dot{\vec{P}})_z = \dot{P}_z \quad (\text{III.3.28})$$

§ III-4. Perdita d'energia per irraggiamento

Come è noto, una conseguenza delle equazioni di Maxwell è che una carica elettrica in moto che non sia rettilineo ed uniforme irradia energia sotto forma di onde elettromagnetiche. Ciò avviene anche per le particelle accelerate nelle macchine, ed in particolare in quelle in cui le particelle percorrono orbite curvilinee. Quindi l'energia finale delle particelle è minore di quella fornita loro dalla macchina.

L'espressione generale dell'energia irradiata per unità di tempo da una particella di carica q e velocità \vec{v} è la seguente (in unità Giorgi)^(*):

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2 - (\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}})^2 / c^2}{(1 - \beta^2)^3} \quad (\text{III.4.1})$$

Specializziamo questa formula nel caso di un moto circolare uniforme, come si realizza approssimativamente nel betatrone, nel sincrotrone e nel sincrociclotrone. Se $\vec{\tau}$ e \vec{n} indicano rispettivamente i versori della tangente e della normale all'orbita circolare di raggio R , si ha

$$\begin{cases} \vec{v} = v\vec{\tau} = \beta c\vec{\tau} \\ \dot{\vec{v}} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \beta^2 \frac{c^2}{R}\vec{n} \end{cases} \quad (\text{III.4.2})$$

e

$$|\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}}| = \frac{\beta^3 c^3}{R} \quad (\text{III.4.3})$$

In tal caso

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\beta^4 c}{R^2} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \quad (\text{III.4.4})$$

Dalla (I.2.6) si ricava

$$\frac{1}{1 - \beta^2} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \quad (\text{III.4.5})$$

e quindi

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\beta^4 c}{R^2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^4 \quad (\text{III.4.6})$$

(*) v. BECKER, Teoria dell'Elettricità, vol. II, § 59 (ove è usato il sistema di Gauss).

Per particelle fortemente relativistiche è lecito porre $\beta^4 = 1$ nella (III.4.6). L'energia irradiata in una rotazione completa, L , è data (con $v \simeq c$) da

$$L = W \frac{2\pi R}{c} = \frac{q^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} \left(\frac{E}{E_0} \right)^4 \quad (\text{III.4.7})$$

Come si vede, l'energia irradiata in un giro è inversamente proporzionale al raggio dell'orbita e dipende molto fortemente dal rapporto E/E_0 . Esprimendo R in metri e L in eV si ha

$$L = \frac{6.05 \cdot 10^{-9}}{R} \left(\frac{E}{E_0} \right)^4 \quad (\text{III.4.8})$$

e per elettroni

$$L = 0.88 \cdot 10^{-7} \frac{E^4}{R} \quad (\text{III.4.9})$$

(E in MeV, R in metri, L in eV).

L'irraggiamento pone un limite teorico all'energia massima raggiungibile in un betatrone. Infatti non si può superare quel valore in corrispondenza del quale l'energia irradiata è uguale all'energia acquistata in un giro. Si trova che tale valore limite è di circa 500 MeV, e quindi di scarso interesse pratico, perchè già ad energie inferiori il betatrone non è economicamente conveniente.

Se si studia la distribuzione direzionale e spettrale della radiazione elettromagnetica emessa, si trova che la maggior parte dell'energia è emessa in un cono, centrato intorno alla direzione della velocità della particella, di semiapertura α uguale a E_0/E : nel caso di elettroni si tratta quindi di un angolo molto piccolo. Lo spettro della radiazione emessa presenta un massimo in corrispondenza della frequenza

$$\nu = \nu_{\text{rot}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^3 \quad (\text{III.4.10})$$

dove ν_{rot} è la frequenza di rotazione delle particelle, cioè praticamente $\frac{c}{2\pi R}$. Questo massimo è molto acuto, in modo che si può considerare la radiazione emessa tutta su questa frequenza. Nel caso di elettroni di energia non troppo alta il massimo può cadere nel visibile (per esempio, per $E=80$ MeV, $R = 75$ cm il massimo si ha a 5000 \AA , cioè nel verde): tale fenomeno è facilmente osservabile guardando, attraverso una finestra della ciambella, in direzione tangenziale al fascio (con le debite precauzioni contro i raggi X).

Osserviamo infine che la potenza totale irradiata si può calcolare moltiplicando la potenza irradiata da una particella per il numero delle particelle, purchè la distanza tra esse sia grande rispetto alle lunghezze d'onda della radiazione emessa. Nel caso opposto si deve tener conto dell'interferenza tra le radiazioni emesse da diverse particelle vicine, che in generale aumenta la potenza irradiata: per es., nel caso estremo che n particelle formino un pacchetto piccolo rispetto alle lunghezze d'onda irradiate, esse si comporterebbero come una unica particella di carica nq e quindi l'energia irradiata sarebbe proporzionale a n^2 invece che ad n (effetto di coerenza).

In alcune macchine che danno fasci molto intensi ci si trova in un caso intermedio più difficile da calcolare. Nelle altre macchine, che danno fasci meno intensi, l'effetto di coerenza non si osserva.

Per chiudere diamo, a titolo d'esempio, alcuni dati relativi al sincrotrone per elettroni di Frascati ($E_{fin} = 1000$ MeV, $R = 3.6$ m): si ha $L = 27.000$ eV, $\lambda = \frac{c}{\nu} = 26 \text{ \AA}$, e la radiazione viene emessa in un cono di semiapertura $\alpha = 1'43''$.

CAPITOLO IV

TEORIA DEL BETATRONE

§ IV-1. Introduzione

Il betatrone, come abbiamo visto nel § I-4, consiste di un magnete opportunamente sagomato su cui generalmente si sovrappongono due avvolgimenti, dei quali uno è alimentato a corrente alternata e l'altro a corrente continua. Quest'ultimo (detto bias) si introduce per ragioni pratiche che verranno specificate in seguito, ma non interviene nell'esposizione schematica di § I-4 che porta alla condizione di betatrone (I.4.7):

$B_z = \frac{1}{2} \bar{B}_z + \text{cost.}$ Se questa condizione è verificata, abbiamo visto che le particelle si possono accelerare mantenendole su un'orbita circolare di raggio uguale al raggio medio della ciambella. In pratica, invece, saranno iniettate nella macchina anche particelle a raggi diversi dal raggio medio della ciambella e con velocità non esattamente tangenziale. E' utile quindi, servendosi delle formule trovate nel capitolo precedente, studiare più in generale le orbite delle particelle nel betatrone.

§ IV-2. Orbite circolari e cerchio istantaneo. Orbita di equilibrio

Cerchiamo innanzitutto la condizione perchè l'orbita sia perfettamente circolare, e precisamente sia

$$r = \text{cost.} \qquad z = \text{cost.} \qquad (\text{VI.2.1})$$

Dovrà essere $P_r = P_z = 0$, e quindi dalle (III.3.25), (III.3.26)

$$\mathcal{F}\mathcal{F}' = 0 \qquad (\text{IV.2.2})$$

$$\mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0 \qquad (\text{IV.2.3})$$

e, dovendosi escludere $\mathcal{F} = 0$ (altrimenti si avrebbe $P_\vartheta = 0$ per la (III.3.24)), si ottiene:

a) $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0$, cioè $\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \qquad (\text{IV.2.4})$

e questo per la (III.2.3) porta a $B_r = 0$. Tale condizione è soddisfatta nel piano $z=0$, essendo $B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}$ funzione dispari di z (in quanto A è funzione pari di z , per la simmetria). Tale piano verrà detto "piano mediano". Nei casi pratici non vi sono altri punti in cui $B_r = 0$, quindi l'orbita giace nel piano mediano.

b) $\mathcal{F}' = 0$, cioè la condizione seguente

$$qA'(r, 0, t) = -p/r^2 \quad (\text{IV.2.5})$$

che determina r .

Sostituendo il valore di p dalla (III.3.19) otteniamo

$$qA' = -\frac{1}{r}(P_\vartheta + qA) \quad (\text{IV.2.6})$$

da cui per la (III.2.4)

$$qB_z = -\frac{P_\vartheta}{r} \quad (\text{IV.2.7})$$

nella quale si riconosce la nota relazione (I.2.16) tra quantità di moto e raggio di curvatura^(★). Abbiamo così trovato, come era prevedibile, che la quantità di moto $P = P_\vartheta$ deve essere tale che, nel campo B_z , dia luogo ad un raggio di curvatura pari alla distanza r dall'asse.

Questo raggio che soddisfa la (IV.2.5), viene detto raggio istantaneo di rotazione, r_i . Come già detto, per esso vale ad ogni istante la relazione

$$\mathcal{F}'(r_i) = 0 \quad (\text{IV.2.8})$$

Il raggio istantaneo risulterà in generale funzione di t , in quanto A' è funzione di t : quindi a rigore la traiettoria non è circolare. Però, se la variazione di A (e quindi di r_i) è adiaba

(★) - Il segno - deriva dalla convenzione adottata per i versi positivi delle z e delle ϑ (regola del cavaturaccioli)

tica, cioè ~~è~~ molto lenta rispetto al periodo di rotazione delle particelle, si può considerare il moto di queste come praticamente circolare, con raggio variabile lentamente nel tempo. Si dice allora che all'istante t la particella percorre il cerchio istantaneo di raggio $r_i(t)$. (In realtà si tratta di un moto a spirale stretta).

In un caso particolare (cioè per particolari valori di v e di p), accade, come verificheremo, che il raggio istantaneo di rotazione resta costante nel tempo. In corrispondenza di tale valore del raggio, r_0 , l'orbita sarà detta orbita principale o di equilibrio.

Affinchè l'orbita sia circolare il raggio r_0 deve soddisfare la (IV.2.5), e se si vuole che non dipenda da t si richiede che

$$A'(r_0, 0, t) = - p/q r_0^2 = \text{cost.} \quad (\text{IV.2.9})$$

Teniamo conto del fatto che, se il ferro del ^{magnete} magnetica è ovunque lontano dalla saturazione (cosicchè la permeabilità μ si può ritenere costante), il campo magnetico prodotto da una corrente I nelle spire (e quindi anche il relativo A) è proporzionale a I ; quindi nel caso già considerato, in cui vi sono due avvolgimenti indipendenti, uno alimentato a corrente alternata $I_1(t)$, l'altro a corrente continua I_2 , sarà

$$A(r, 0, t) = f_1(r) I_1 + f_2(r) I_2 \quad (\text{IV.2.10})$$

La (IV.2.9) allora si scrive

$$f_1'(r_0) I_1(t) + f_2'(r_0) I_2 = - p/q r_0^2 = \text{cost.} \quad (\text{IV.2.11})$$

e quindi, perchè r_0 sia indipendente da t , deve essere

$$f_1'(r_0) = 0 \quad (\text{IV.2.12})$$

Questa condizione determina r_0 ; inoltre dalla (IV.2.11) si vede che le condizioni iniziali devono essere tali che

$$p = -qr_0^2 f_2'(r_0) I_2 \quad (\text{IV.2.13})$$

Mostriamo ora che per $r = r_0$ determinato dalla (IV.2.12) è soddisfatta la condizione di betatrone (I.4.7). Calcoliamo direttamente $B_z(r_0)$ e $\bar{B}_z(r_0)$ attraverso le (III.2.4), (III.2.7).

$$\begin{aligned} B_z(r_0, 0, t) &= \left(A' + \frac{A}{r} \right)_{r=r_0} = \left(f_1'(r_0) + \frac{f_1(r_0)}{r_0} \right) I_1(t) + \left(f_2'(r_0) + \frac{f_2(r_0)}{r_0} \right) I_2 = \\ &= \frac{f_1(r_0)}{r_0} I_1(t) + \left(f_2'(r_0) + \frac{f_2(r_0)}{r_0} \right) I_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.14})$$

$$\bar{B}_z(r_0, 0, t) = \frac{2}{r_0} A(r_0, 0, t) = \frac{2}{r_0} \left[f_1(r_0) I_1(t) + f_2(r_0) I_2 \right] \quad (\text{IV.2.15})$$

Da queste si ha, per $r = r_0$ ed a qualunque istante

$$B_z = \frac{1}{2} \bar{B}_z + f_2'(r_0) I_2 = \frac{1}{2} \bar{B}_z + \text{cost.} \quad (\text{IV.2.16})$$

che è la relazione (I.4.7) già trovata per altra via.

In assenza di bias ($I_2=0$) si ha $B_z = \frac{1}{2} \bar{B}_z$, e per la (IV.2.13) $p=0$. Se i poli del magnete sono configurati (qualitativamente) come in fig. 1 (§ I-4.), in modo tale che il campo magnetico nella ciambella decresca regolarmente, è sempre possibile trovare un r_0 che soddisfi la (IV.2.12), senza che occorra dare al profilo dei poli una forma calcolata in modo speciale.

Questo r_0 può essere trovato sperimentalmente, utilizzando la proprietà che per esso il campo elettrico indotto ha un minimo. Infatti è per la (III.2.5) $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$, e quindi $\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\partial A'}{\partial t}$ che si annulla per $r=r_0$; inoltre, come si potrebbe controllare, $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} > 0$.

Per trovare r_0 in pratica si può disporre nel piano mediano una serie di bobine piatte, concentriche con l'asse

della macchina, di raggio diverso e con la stessa lunghezza totale (naturalmente le bobine con raggio minore avranno un maggior numero di spire). Misurando la f.e.m. indotta $\int E dl$ ai capi di ciascuna bobina si determina quale è la bobina per cui tale f.e.m. è minima. Il raggio di questa bobina sarà r_0 ; infatti, avendo le bobine tutte la stessa lunghezza, il minimo di $\int E dl$ corrisponde al minimo di E .

Un elettrone percorrerebbe l'orbita di equilibrio se fosse iniettato tangenzialmente ad essa con velocità iniziale tale che (cfr. (IV.2.7)) si abbia, all'istante dell'iniezione

$$P_{\vartheta} = -qr_0 B_z \quad (\text{IV.2.17})$$

ossia

$$|v_{\vartheta}| = \left| \frac{P_{\vartheta}}{m_r} \right| = \frac{r_0}{m_r} |q B_z| \quad (\text{IV.2.18})$$

Ora è materialmente impossibile iniettare gli elettroni in questo modo perchè, se la sorgente di elettroni fosse sull'orbita di equilibrio, le particelle vi urterebbero contro dopo il primo giro.

In pratica l'iniettore (v. fig. 28) è costituito da un

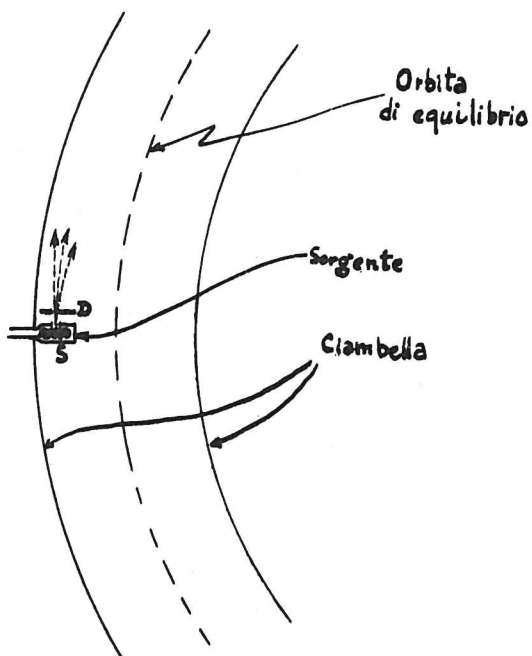


Fig. 28

filamento incandescente racchiuso in una scatola metallica S che sporge entro la ciambella e che ha un sottile foro da cui escono gli elettroni. Di fronte a questo si trova un diaframma forato D, mantenuto ad un potenziale positivo (dell'ordine di 50 kV) rispetto al filamento; esso serve ad imprimere agli elettroni una velocità iniziale.

Questo potenziale è applicato solo nei pochi microsecondi per cui dura l'iniezione.

Gli elettroni escono in un cono assai stretto, partendo da un punto all'esterno dell'orbita di equilibrio. Ricordiamo che essi vengono iniettati in fase di campo magnetico crescente: si sceglie l'istante di iniezione in modo tale che il valore B_z in quell'istante soddisfi la relazione

$$|B_z| = \frac{m_v v_{\text{iniziale}}}{|q| r_s} \quad (\text{IV.2.19})$$

che si può ricavare dalla condizione (IV.2.7) (valida per le orbite circolari), calcolata per r uguale alla distanza r_s della sorgente dell'asse della macchina (v. fig. 29) e per il valore di P_ϕ corrispondente alle condizioni iniziali.

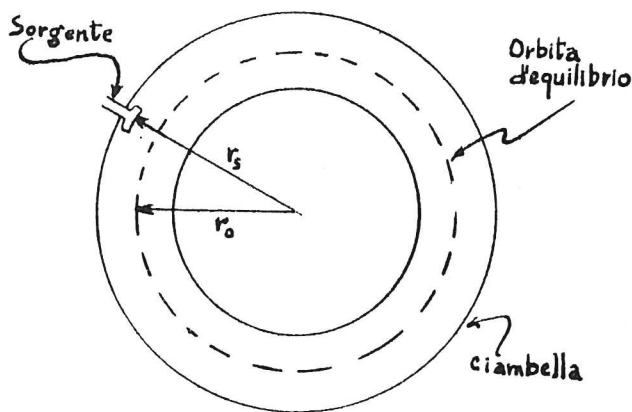


Fig. 29

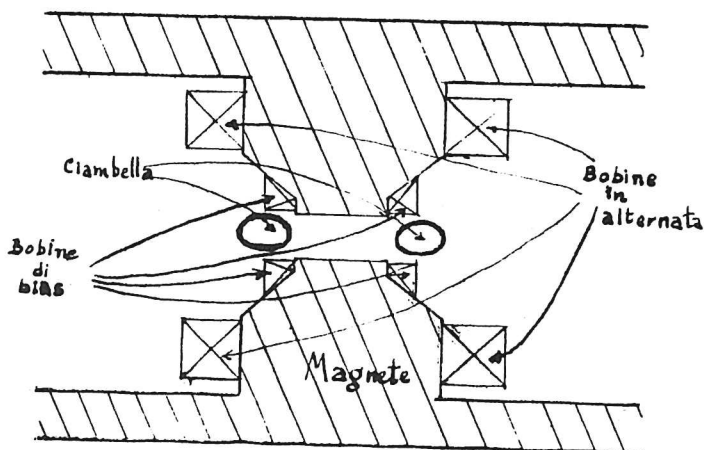


Fig. 30

In questo modo le particelle iniettate tangenzialmente cominciano a percorrere un'orbita circolare di raggio istantaneo $r_i = r_s$. Questo raggio varia nel tempo e precisamente, come dimostreremo, esso tende al valore r_0 (notiamo che ciò succede in ogni caso, anche se $r_s < r_0$); ossia se si inietta l'elettrone esternamente all'orbita di equilibrio, esso "spiralizza" verso l'interno (e viceversa).

Dimostriamo questo nel caso in cui il bias agisce solo sul nucleo centrale dei poli del magnete (v. fig. 30); allora nella

Per la definizione di $r_i(t)$ (IV.2.5), usando la (IV.2.10) con $f_2(r) = 0$, si ha

$$-\frac{p}{r_i^2} - q I_1(t) f_1'(r_i) = 0 \quad (\text{IV.2.20})$$

ossia

$$r_i^2 f_1'(r_i) = -\frac{p}{q I_1(t)} \quad (\text{IV.2.21})$$

Poichè r_i è sempre non molto diverso da r_0 , possiamo porre $r_i = r_0 + \varrho$, e considerare ϱ piccolo rispetto a r_0 . Allora sviluppando la (IV.2.21) in serie di potenze di ϱ e trascurando i termini in ϱ^2 si ha

$$r_i^2 f_1'(r_i) \simeq r_0^2 f_1'(r_0) + [r^2 f_1'(r)]'_{r=r_0} \cdot \varrho = -\frac{p}{q I_1(t)} \quad (\text{IV.2.22})$$

ed essendo $f_1'(r_0) = 0$ per la (IV.2.12)

$$\varrho = -\frac{p}{q r_0^2 f_1''(r_0) I_1(t)} \quad (\text{IV.2.23})$$

quindi

$$|\varrho| = \frac{\text{cost.}}{|I_1(t)|} \quad (\text{IV.2.24})$$

Poichè l'iniezione avviene quando $I_1(t)$ è crescente, si vede dalla (IV.2.24) che ϱ decresce in modulo, cioè r_i si avvicina a r_0 . Questo fenomeno, detto spiralizzazione, è molto importante perchè permette alle particelle di evitare di urtare contro la sorgente dopo aver compiuto il primo giro.

§ IV-3. Condizioni di stabilità per il moto di un elettrone generico

Quello che è stato esposto nel paragrafo precedente vale nel caso di elettroni iniettati tangenzialmente all'orbita circolare di raggio r_s . In realtà la sorgente emette elettroni in tutte le direzioni interne ad un cono stretto avente per asse la direzione tangenziale.

Consideriamo quindi ora il caso di un elettrone iniettato in condizioni iniziali generali, ma sempre vicine a quelle relative alle orbite circolari. Precisamente la posizione iniziale sia $r \sim r_s$, $z \sim 0$ (con r_s poco maggiore di r_0), ed ammettiamo che la velocità iniziale possa essere inclinata di poco sia rispetto alla tangente al cerchio $r=r_s$, sia rispetto al piano $z=0$. Infine il valore iniziale di P_θ sia poco diverso dal valore $-qr_s B_z$ relativo a r_s .

Convorrà considerare, insieme con questo, un elettrone di riferimento iniettato con $r=r_s$, $z=0$ ed inoltre con $P_r = P_z = 0$, $P_\theta = -qr_s B_z$, cioè in modo da descrivere il cerchio istantaneo a raggio lentamente variabile $r_i(t)$. Porremo allora

$$r(t) = r_i(t) + x(t) \quad (\text{IV.3.1})$$

e considereremo $x(t)$ e $z(t)$ come quantità piccole del primo ordine (metodo delle perturbazioni).

Riferiamoci alle equazioni generali del moto (III.3.25), (III.3.26). Innanzitutto troviamo le espressioni approssimate per $\mathcal{F}(r, z, t) \equiv \mathcal{F}(r_i + x, z, t)$, e per le sue derivate che entrano nei secondi membri. Indichiamo con l'indice "i" le quantità relative al moto sul cerchio istantaneo (per esempio $\mathcal{F}_i \equiv \mathcal{F}(r_i, 0, t)$, ecc...), e sviluppiamo le \mathcal{F} , \mathcal{F}' e $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$ in serie di Taylor rispetto a x e z (trascurando le potenze superiori alla prima):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}_i + \mathcal{F}'_i x + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)_i z \\ \mathcal{F}' &= \mathcal{F}'_i + \mathcal{F}''_i x + \left(\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial z}\right)_i z \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)_i + \left(\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial z}\right)_i x + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}\right)_i z \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

In queste espressioni si ha $\mathcal{F}'_i = 0$ per la definizione di r_i (IV.2.8). Inoltre poichè A (e quindi \mathcal{F}) è funzione pari di z (per la simmetria del campo rispetto al piano $z=0$) sarà $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ per qualunque r , e quindi anche

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad (\text{IV.3.3})$$

Allora le (IV.3.2) si riducono alla forma seguente

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}_i \\ \mathcal{F}' &= \mathcal{F}'_i x \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z^2}\right)_i z \end{aligned} \quad (\text{IV.3.4})$$

Dalla (III.3.24) si ha

$$\mathcal{F}_i = (m_v v_{\vartheta})_i = m_i r_i \omega \quad (\text{IV.3.5})$$

ove si è posto $m_i = (m_v)_i$, $\omega = \dot{\vartheta}_i^{(*)}$.

Dalla (III.3.22) derivando si ha

$$\mathcal{F}' = -\frac{p}{r^2} - qA' \quad \mathcal{F}'' = \frac{2p}{r^3} - qA'' \quad (\text{IV.3.6})$$

Per $r = r_i$ sappiamo che $\mathcal{F}' = 0$; ricavando da questa relazione p e sostituendo in \mathcal{F}'' si ha

$$\mathcal{F}''_i = -q \left(\frac{2A'_i}{r_i} + A''_i \right) \quad (\text{IV.3.7})$$

Per esprimere questa relazione mediante B , ricordiamo la (III.2.4)

$$rB_z = rA' + A \quad (\text{IV.3.8})$$

(*) Si noti che con $(m_v)_i$ si indica la massa dell'elettrone di riferimento introdotto all'inizio di questo paragrafo, il quale percorre il cerchio istantaneo di raggio r_i . Con m_v invece si indica la massa di un elettrone generico, in particolare di un elettrone la cui orbita si scosti di poco dal cerchio istantaneo. Nella nostra approssimazione si può trascurare la differenza (che risulta essere una grandezza piccola di ordine superiore a x e z).

da cui

$$(rB_z)' = rA'' + 2A' \quad (\text{IV.3.9})$$

quindi

$$F_i'' = -\frac{q}{r_i} (rB_z)_i' \quad (\text{IV.3.10})$$

Dalla definizione di F si ha anche

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_i = -q \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)_i \quad (\text{IV.3.11})$$

e dalla (III.2.3)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\frac{\partial B_r}{\partial z} \quad (\text{IV.3.12})$$

Inoltre, prendendo la componente ϑ dell'equazione vettoriale $\text{rot} \vec{B} = 0$ (*) si ottiene

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \quad (\text{IV.3.13})$$

In definitiva, sostituendo (IV.3.13), (IV.3.12) in (IV.3.11) si ha

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_i = q (B_z')_i \quad (\text{IV.3.14})$$

Così le (IV.3.4) si scrivono

$$F = m_i r_i \omega$$

$$F' = -\frac{q}{r_i} (rB_z)_i' x \quad (\text{IV.3.15})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = q (B_z')_i z$$

Per mezzo delle (IV.3.15) le equazioni del moto (III.3.25), (III.3.26) diventano

$$\dot{P}_r = q (rB_z)_i' \omega x \quad (\text{IV.3.16})$$

$$\dot{P}_z = -q r_i (B_z')_i \omega z \quad (\text{IV.3.17})$$

ove si è posto $m_i = m_v$ (cfr. nota pag. precedente).

(*) Per l'equazione di Maxwell si ha $\text{rot} \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$.
Nella zona della ciambella le grandezze a secondo membro sono trascurabili.

Ricordiamo che $P_r = m_v \dot{r}$, $P_z = m_v \dot{z}$, cosicchè si ha

$$\dot{P}_r = m_v \ddot{r} + \dot{m}_v \dot{r} = m_v (\ddot{r}_i + \ddot{x}) + \dot{m}_v (\dot{r}_i + \dot{x}) \quad (\text{IV.3.18})$$

$$\dot{P}_z = m_v \ddot{z} + \dot{m}_v \dot{z} \quad (\text{IV.3.19})$$

In prima approssimazione possiamo trascurare il termine in \dot{m}_v e quelli nelle derivate di r_i . Ciò si giustifica riferendosi alle considerazioni fatte nel paragrafo precedente; poichè il campo B varia adiabaticamente, ne segue che anche la quantità di moto e l'energia, e quindi anche m_v ed r_i variano adiabaticamente, mentre le variazioni di x e z possono essere molto più rapide. (Torneremo su questo in seconda approssimazione). Nell'approssimazione adiabatica le (IV.3.16), (IV.3.17) divengono

$$\ddot{x} = \frac{q}{m_v} (r B_z)_i' \omega x \quad (\text{IV.3.20})$$

$$\ddot{z} = -\frac{q}{m_v} r_i (B_z)_i' \omega z \quad (\text{IV.3.21})$$

Per semplificare queste equazioni si consideri la (IV.2.7); da essa segue

$$P_\varphi = m_i r_i \dot{\varphi}_i \simeq m_v r_i \omega = -q r_i (B_z)_i \quad (\text{IV.3.22})$$

da cui

$$\frac{q}{m_v} = -\frac{\omega}{(B_z)_i} \quad (\text{IV.3.23})$$

e sostituendo questa in (IV.3.20), (IV.3.21) si ha

$$\ddot{x} = -\frac{(r B_z)_i'}{(B_z)_i} \omega^2 x \quad (\text{IV.3.24})$$

$$\ddot{z} = r_i \left(\frac{B_z'}{B_z} \right)_i \omega^2 z \quad (\text{IV.3.25})$$

Di solito si approssima la funzione B_z nel piano $z = 0$ ed in vicinanza dell'orbita di equilibrio con l'espressione

$$B_z(r, 0, t) = B_0(t) r^{-n} \quad (\text{IV.3.26})$$

in cui n è una costante detta indice del campo. In tal caso

$$\frac{rB'_z}{B_z} = -n \qquad \frac{(rB_z)'}{B_z} = 1-n \qquad (\text{IV.3.27})$$

(Anche nel caso in cui B_z non si possa porre esattamente sotto la forma (IV.3.26), si può sempre definire un "indice del campo" $n = -\frac{rB'_z}{B_z}$, che nei casi pratici sarà una funzione lentamente variabile di r).

Con questa espressione di B_z le (IV.3.24), (IV.3.25) divengono

$$\ddot{x} = -(1-n)\omega^2 x \qquad (\text{IV.3.28})$$

$$\ddot{z} = -n\omega^2 z \qquad (\text{IV.3.29})$$

e sono equazioni lineari di tipo ben noto a coefficienti costanti (nell'approssimazione adiabatica).

Esse hanno soluzioni oscillanti se i coefficienti di x e di z sono negativi, cioè se

$$0 < n < 1 \qquad (\text{IV.3.30})$$

(condizione di stabilità).

Se fosse $n \leq 0$ la (IV.3.29) avrebbe soluzioni di tipo esponenziale o lineare, e quindi la particella si allontanerebbe indefinitivamente dal piano mediano (instabilità verticale). Se fosse $n \geq 1$ si avrebbe similmente una instabilità radiale.

§ IV-4. Oscillazioni di betatrone

Se n è compreso nei limiti (IV.3.30) la particella oscilla intorno alla particella di riferimento (la quale percorrere il cerchio istantaneo che si contrae lentamente). Tali oscillazioni si dicono "oscillazioni di betatrone", perchè sono state studiate per la prima volta in questa macchina; ma tutta la teoria si applica anche al sincrotrone. Posto

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T_r} = \sqrt{1-n} \omega \quad (\text{IV.4.1})$$

$$\omega_z = \frac{2\pi}{T_z} = \sqrt{n} \omega \quad (\text{IV.4.2})$$

le (IV.3.28), (IV.3.29) si scrivono

$$\ddot{x} = -\omega_r^2 x \quad (\text{IV.4.3})$$

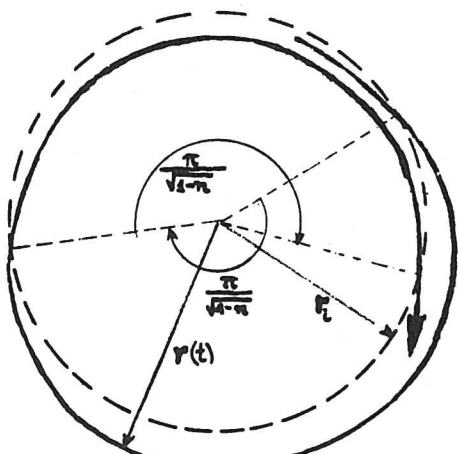
$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z \quad (\text{IV.4.4})$$

Queste equazioni rappresentano oscillazioni sinusoidali rispettivamente di pulsazioni ω_r e ω_z e periodo T_r e T_z . Notiamo che in un giro un elettrone non arriva a compiere un'oscillazione completa. Infatti si ha

$$T_r = \frac{T}{\sqrt{1-n}} \quad T_z = \frac{T}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV.4.5})$$

(ove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il tempo impiegato dall'elettrone a compiere un giro) e per la (IV.3.30) $T_r > T$, $T_z > T$.

Una oscillazione (sia radiale che verticale) prende dunque più di un giro e precisamente un angolo di $\frac{2\pi}{\sqrt{1-n}}$ e $\frac{2\pi}{\sqrt{n}}$ rispettivamente.



A titolo di esempio riportiamo schematicamente la proiezione sul piano mediano della traiettoria di una particella durante una oscillazione completa di betatrone (fig. 31, in cui l'ampiezza

delle oscillazioni è stata esagerata a scopo dimostrativo).

§ IV-5. Smorzamento delle oscillazioni di betatrone

Consideriamo ora in seconda approssimazione l'influenza dei termini che abbiamo trascurato nelle equazioni (IV.3.18), (IV.3.19). Conserveremo i termini $\dot{m}_v \dot{x}$ e $\dot{m}_v \dot{z}$, mentre potremo ancora trascurare il termine in \ddot{r}_i ed il prodotto $\dot{m}_v \dot{r}_i$ che sono piccoli del secondo ordine. Nella stessa approssimazione si può considerare $\frac{\dot{m}_v}{m_v}$ come una costante piccola. In tal caso le (IV.3.18), (IV.3.19) conducono alle seguenti equazioni:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{m}_v}{m_v} \dot{x} + \omega_r^2 x = 0 \quad (\text{IV.5.1})$$

$$\ddot{z} + \frac{\dot{m}_v}{m_v} \dot{z} + \omega_z^2 z = 0 \quad (\text{IV.5.2})$$

Notiamo che $\frac{\dot{m}_v}{m_v} > 0$, perchè la massa cresce con la velocità; quindi le (IV.5.1), (IV.5.2) descriverebbero delle oscillazioni sinusoidali smorzate, se si considerassero ω_r, ω_z costanti.

In realtà nella presente approssimazione (riferendoci per esempio alle oscillazioni verticali) non possiamo considerare ω_z costante esattamente; infatti $\dot{\omega}_z$ è una grandezza dello stesso ordine di \dot{m}_v . Tuttavia, poichè la soluzione non si dovrà scostare molto da una sinusoidale smorzata, possiamo cercare una soluzione della (IV.5.2) della forma

$$z(t) = a(t) \text{sen} \int_0^t \omega_z(\tau) d\tau \quad (\text{IV.5.3})$$

che per a, ω_z costanti si riduce alla soluzione della (IV.4.4) (senza termine di smorzamento). Poichè il termine di smorzamento è piccolo e la variazione di ω_z è lenta, si possono considerare $\dot{a}, \dot{\omega}_z$ come grandezze piccole del primo ordine e trascurare tutte le grandezze piccole del secondo ordine ($\ddot{a}, \ddot{\omega}_z, \dot{a} \dot{\omega}_z, \dots$). Derivando la (IV.5.3) si hanno le formule seguenti (ove si è posto

$$\int_0^t \omega_z(\tau) d\tau = \phi(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{a} \operatorname{sen} \phi + a \omega_z \cos \phi \\ \ddot{z} &= \ddot{a} \operatorname{sen} \phi + 2 \dot{a} \omega_z \cos \phi + a \dot{\omega}_z \cos \phi - a \omega_z^2 \operatorname{sen} \phi\end{aligned}\quad (\text{IV.5.4})$$

Sostituendo z , \dot{z} e \ddot{z} in (IV.5.2) si ha

$$\operatorname{sen} \phi \left(\ddot{a} + \dot{a} \frac{\dot{m}_v}{m_v} \right) + \cos \phi \left(a \omega_z \frac{\dot{m}_v}{m_v} + 2 \dot{a} \omega_z + a \dot{\omega}_z \right) = 0 \quad (\text{IV.5.5})$$

L'intero coefficiente del seno è piccolo del secondo ordine e si può trascurare; e la (IV.5.5) implica, dividendo per $a \omega_z$,

$$\frac{\dot{m}_v}{m_v} + 2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\omega}_z}{\omega_z} = 0 \quad (\text{IV.5.6})$$

Ricordiamo che $\omega_z = \omega \sqrt{n} = \sqrt{n} q B_z / m_v$ da cui

$$\frac{\dot{\omega}_z}{\omega_z} = \frac{\dot{B}_z}{B_z} - \frac{\dot{m}_v}{m_v} \quad (\text{IV.5.7})$$

e sostituendo questa nella (IV.5.6) si ottiene

$$2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{B}_z}{B_z} = 0 \quad (\text{IV.5.8})$$

da cui

$$a = \frac{\text{cost.}}{\sqrt{B_z}} \quad (\text{IV.5.9})$$

Poichè durante l'accelerazione B_z va crescendo, si ha (come conseguenza dell'aumento relativistico di massa) che l'ampiezza delle oscillazioni è smorzata nel tempo con andamento inversamente proporzionale alla radice quadrata del campo. Un risultato completamente analogo si ottiene per le oscillazioni radiali.

Riportiamo in fig. 32 l'andamento schematico di $z(t)$ e di $r(t)$.

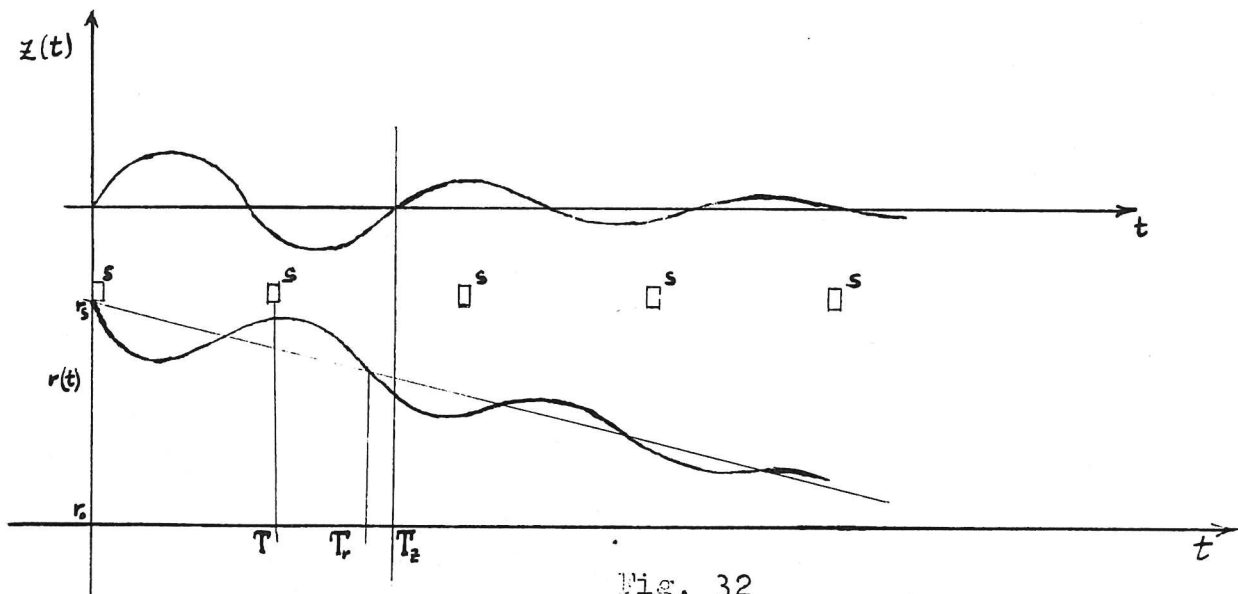


Fig. 32

I rettangoli S, posti in corrispondenza dei valori di t per cui la particella passa davanti alla sorgente di elettroni, rappresentano la posizione di questa (ossia un ostacolo che deve essere evitato).

Notiamo che, insieme col diminuire del raggio istantaneo, lo smorzamento delle oscillazioni contribuisce a far sì che un maggior numero delle particelle iniettate anche non tangenzialmente al cerchio istantaneo eviti di colpire la sorgente dopo il primo giro ^(*).

Dopo un certo numero di giri le oscillazioni praticamente cessano (salvo per qualche particella che ricomincia ad oscillare in seguito ad urti contro molecole del gas), r_i è circa uguale a r_0 , ed il fascetto di elettroni diviene molto sottile (diametro ~ 1 mm). Esso si può rivelare senza distruggerlo ponendo sul percorso degli elettroni una sottile rete metallica che diviene fluorescente nel punto in cui viene colpita dagli elettroni.

(*) - Si potrebbe dimostrare che, se si tiene conto dei termini di secondo ordine trascurati nella trattazione precedente, questi ultimi contribuiscono ad accelerare il processo di restringimento del cerchio istantaneo.

§ IV-6. Realizzazione pratica del betatrone

Si è già fatta una descrizione schematica del betatrone nel § I-4. (cfr. in particolare la fig. 1). Precisiamo ora alcuni dettagli costruttivi di questa macchina.

Come si osserva in fig. 33, che rappresenta la pianta del betatrone, mentre le

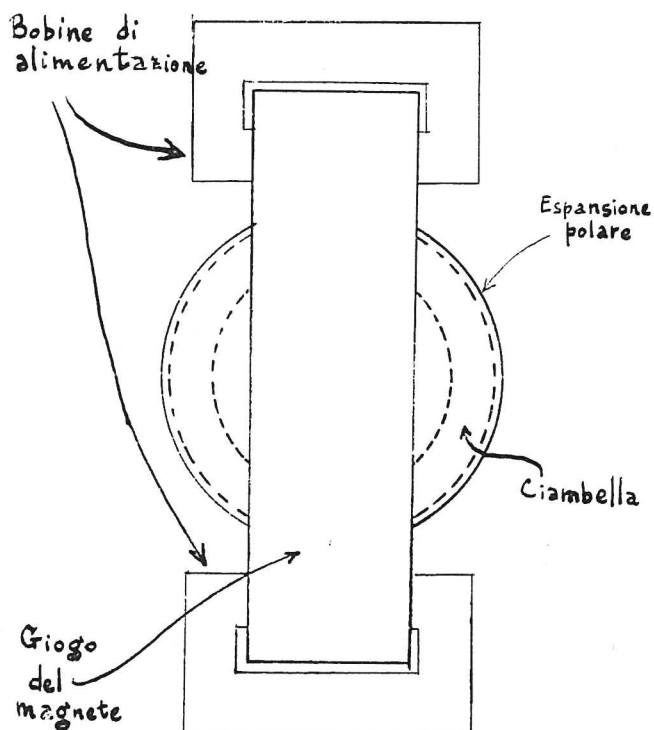


Fig. 33

espansioni polari hanno simmetria assiale, il giogo che chiude il circuito magnetico ha la forma di un telaio rettangolare.

Richiamando quanto è già stato detto nel § 1 di questo capitolo ricordiamo che il magnete è alimentato da due avvolgimenti, uno dei quali è a corrente alternata e l'altro a corrente continua (bias). Ora spiegheremo le ragioni per cui si introduce quest'ultimo.

In assenza di bias l'avvolgimento a corrente alternata produce il campo magnetico sia nella ciambella che nella zona centrale, e $B^{(*)}$ è diverso da \bar{B} per la sagomatura delle espansioni polari. In questo caso certamente è $\bar{B} = 0$ quando $B = 0$ (cioè quando la corrente di alimentazione è nulla); quindi la relazione di betatrone si scrive

$$B = \frac{1}{2} \bar{B} \quad (\text{IV.6.1})$$

(la costante additiva è nulla).

(*) - In questo paragrafo B , \bar{B} indicano B_z , \bar{B}_z ; l'indice z viene soppresso per comodità.

Il limite, tuttavia, a cui può giungere \bar{B} è imposto dalla saturazione del ferro del magnete. Diciamo B_s il valore di saturazione del campo magnetico. Perché valga la (IV.6.1) B non può superare $\frac{1}{2} B_s$. Si ha invece interesse a far sì che anche B possa giungere al valore limite B_s , perchè in tal caso (cfr. (I.7.1) valida anche per il betatrone, con $B = B_{\max}$), a parità di energia finale degli elettroni, si può avere un raggio inferiore.

Per poter ottenere questo bisogna che la costante additiva B_0 nella relazione di betatrone sia diversa da zero, e precisamente tale che quando $\bar{B} = B_s$ sia anche $B = B_s$:

$$B_s = \frac{1}{2} B_s + B_0$$

ossia

$$B_0 = \frac{1}{2} B_s \quad (\text{IV.6.2})$$

La costante additiva B_0 si introduce nella relazione di betatrone appunto mediante il bias. In generale le bobine a corrente continua si fanno agire solo nella zona centrale o nella zona della ciambella. Nel primo caso (v. fig. 34) si applica nella zona centrale un campo magnetico costante $-B_s$ e si fa oscillare B tra B_s e $-B_s$. Nei semiperiodi positivi la relazione di betatrone è soddisfatta, ma non così nei negativi, poichè il campo \bar{B} va in saturazione (cfr. fig. 34); poichè in tali periodi la macchina non accelera elettroni, la cosa non interessa. Infatti, come si è già detto, si utilizzano per l'accelerazione solo i quarti di periodo in cui B è positivo e crescente.

Nel secondo caso (fig. 35) si applica alla sola zona della ciambella un campo magnetico costante $+\frac{1}{2} B_s$ e si fa oscillare \bar{B} tra B_s e $-B_s$. Allora B oscilla tra B_s e 0 , con valor medio $\frac{1}{2} B_s$; non si hanno periodi di saturazione e si utilizza per l'accelerazione un intero semiperiodo della corrente alternata.

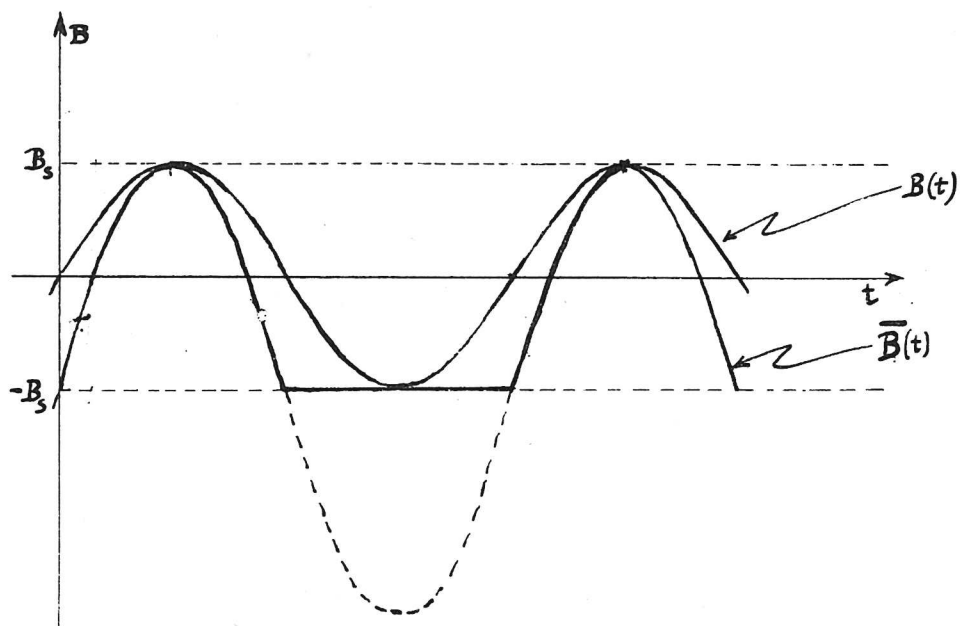


Fig. 34

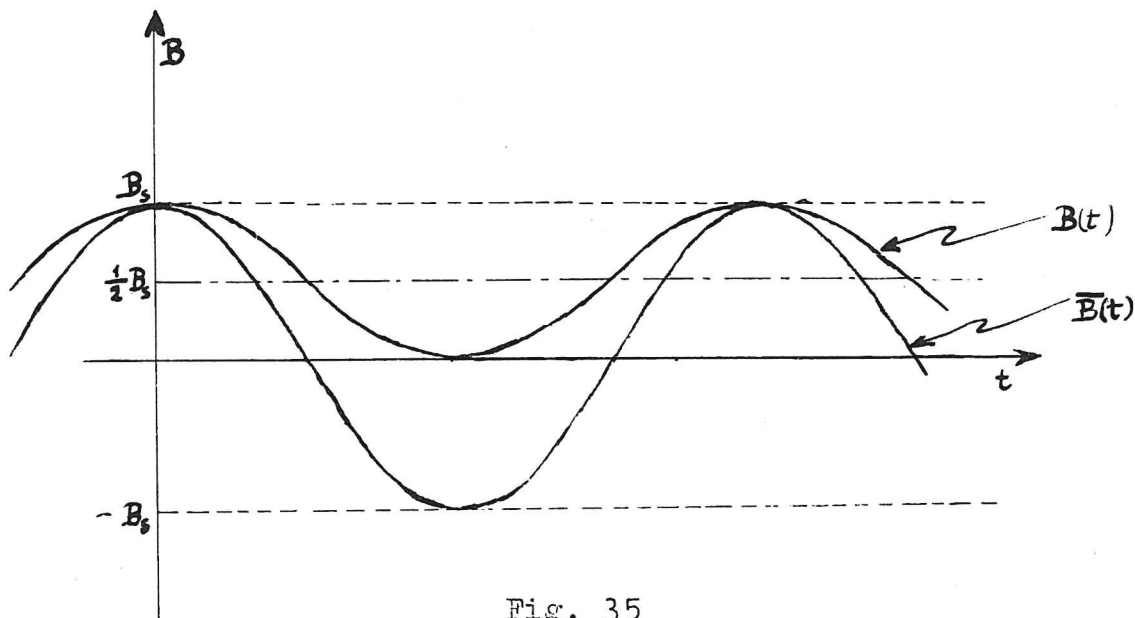


Fig. 35

Per realizzare in pratica queste condizioni si può applicare (v. fig. 36) una alimentazione a corrente continua a tutto il circuito magnetico (bobine A), ed un'altra (bobine B), pure a corrente continua, che agisce solo nella zona centrale dove produce un campo magnetico diretto in senso opposto a quello prodotto dalle bobine A. In questo modo il campo di bias,

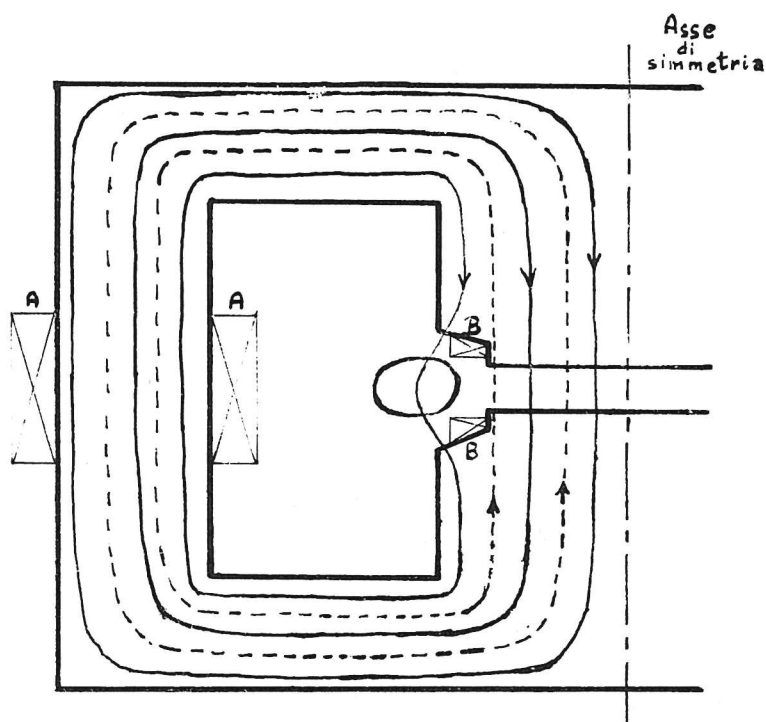


Fig. 36

dato dalla somma algebrica di questi due campi, è praticamente applicato solo nella zona della ciambella. In fig. 36 si sono indicate con linee a tratto pieno le linee di forza del campo prodotto dalle bobine A, e tratteggiate quelle relative alle bobine B.

Per quel che riguarda l'alimentazione delle bobine a corrente alternata, si usa un alternatore. Data l'alta induttanza del magnete sarebbe necessario alimentarlo con una tensione molto elevata, se non si mettesse in parallelo con esso una batteria di condensatori di capacità totale C , tale da costituire un circuito oscillante di frequenza pari a quella dell'alternatore.

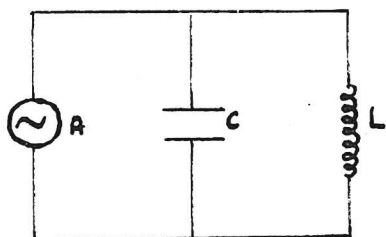


Fig. 37a

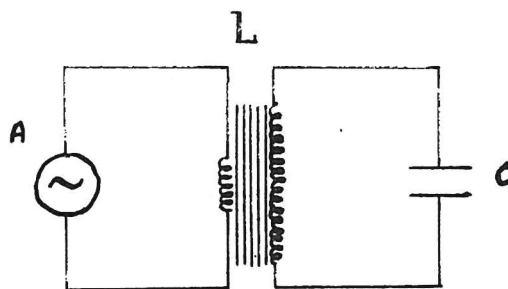


Fig. 37b

Il collegamento con l'alternatore A può essere diretto (fig. 37a) o induttivo (fig. 37b), nel qual caso le bobine L del magnete contengono, oltre alle spire del circuito oscillante, poche spire collegate all'alternatore.

Nel circuito oscillante, come è noto, l'energia si trasforma alternativamente da energia magnetica immagazzinata nel campo del magnete ad energia elettrica accumulata nei condensatori.

Trascurando le perdite, l'equazione di conservazione dell'energia dà

$$\frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \int \frac{B^2}{\mu} d\tau \quad (\text{IV.6.3})$$

ove V è la tensione massima dei condensatori, e l'integrale è esteso al volume del magnete.

Poichè la quantità di energia in gioco è notevole, il banco di condensatori deve avere elevata capacità ed alta tensione di lavoro. I condensatori sono quindi molto costosi. Per ridurre la capacità richiesta conviene usare frequenze più elevate (essendo per un circuito oscillante $\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$).

L'alternatore che è in risonanza con il circuito oscillante, serve a fornire a quest'ultimo l'energia perduta per le seguenti cause:

- a) resistenza ohmica delle bobine;
- b) isteresi del ferro;
- c) correnti di Foucault nel ferro e nelle parti metalliche;
- d) isteresi dielettrica dei condensatori;

oltre naturalmente all'energia fornita al fascetto elettronico (trascurabile rispetto alle precedenti).

Per quanto riguarda l'iniettore si veda quanto già detto in § IV-2. Per estrarre le particelle si fa in modo tale che, quando esse hanno raggiunto l'energia voluta, il campo magnetico vari in maniera tale da non soddisfare più la relazione di betatrone (I.4.7). Allora le particelle spiralizzano verso l'esterno o verso l'interno, e vanno a colpire il bersaglio. Ciò si può realizzare sia alterando in modo opportuno la corrente di alimentazione, sia facendo in modo che il campo B oppure \bar{B} vada in saturazione

CAPITOLO V

TEORIA DEL SINCROTRONE

§ V-1. Considerazioni introduttive.

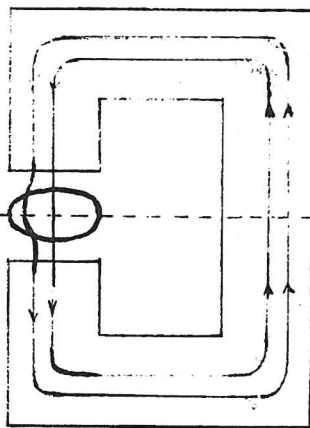


Fig. 38 a

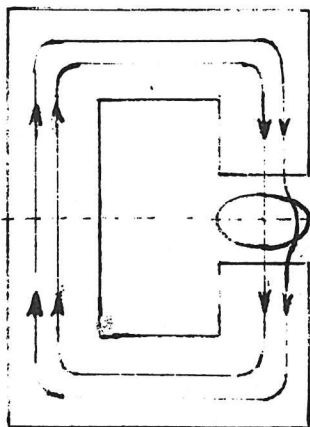


Fig. 38 b

al centro
→ della
macchina

al centro
→ della
macchina

Ai sincrotroni si possono applicare alcune delle conclusioni raggiunte per i betatroni. Anche in questa macchina le particelle percorrono un'orbita circolare di raggio costante R , all'interno di una "ciambella", ma il campo magnetico esiste solo nella zona della ciambella (v. fig. 6, § I-8.), ove ha sostanzialmente lo stesso andamento che nel betatrone. In particolare si potrà anche qui definire un indice del campo n , tale che

$$B(r,t) = B_0(t)r^{-n} \quad (V.1.1)$$

e più generalmente

$$\frac{B'r}{B} = \frac{d \log B}{d \log r} = -n \quad (V.1.2)$$

Si è già detto che il magnete del sincrotrone generalmente ha una sezione a forma di C. Oltre alla disposizione indicata in fig. 6, in cui la C è rivolta verso

l'esterno della macchina, è possibile anche la disposizione in cui la C è rivolta verso l'interno (v. figg. 38a, 38b).

In entrambi i casi una parte del flusso magnetico è concatenato con l'orbita. Si può vedere (cfr. figg. 38a, 38b, ove sono indicate alcune linee di forza concatenate con l'orbita) che, se la ciambella è al centro delle espansioni polari, tale flusso concatenato ha valori uguali ed opposti nei due casi.

Durante il funzionamento della macchina varia il campo magnetico e quindi si ha nella ciambella un campo elettrico indotto che produce un effetto deceleratore nel caso a) ed acceleratore nel caso b). Si verifica così un fenomeno analogo a quello che avviene nel betatrone: tuttavia poichè in questo caso è $\bar{B} \ll B$, anzichè $\bar{B} = 2B$ come nel betatrone (dato che B è praticamente zero dappertutto tranne che nella zona occupata dal magnete), l'energia L_β ($\lesseqgtr 0$ nei casi a), b) rispettivamente) ceduta in un giro alla particella per questo effetto è generalmente piccola rispetto all'energia L_e fornita in un passaggio attraverso la cavità a r.f. . Se chiamiamo L_r l'energia perduta in un giro per irraggiamento (§ III-4) si ha che l'energia totale W acquistata in un giro è

$$W = L_e + L_\beta - L_r \quad (V.1.3)$$

Facciamo notare ora che le considerazioni svolte nel Cap. IV che hanno condotto alla trattazione delle oscillazioni di betatrone, dipendenti dalla configurazione del campo magnetico (cioè dall'indice n) sono valide anche per il sincrotrone. Si avrà quindi ancora la condizione di stabilità (IV.3.30)

$$0 < n < 1 \quad (V.1.4)$$

e le espressioni per le pulsazioni delle oscillazioni radiali e verticali ω_r, ω_z (IV.4.1), (IV.4.2)

$$\omega_r = \sqrt{1-n} \omega \quad (V.1.5)$$

$$\omega_z = \sqrt{n} \omega$$

ove ω è la velocità angolare delle particelle.

Diamo ora qualche informazione sulla cavità acceleratrice a r.f.. Essa può avere una forma del tipo di quella rappresentata in fig. 39, che dà una sezione della cavità con un piano passante per il suo asse di simmetria.

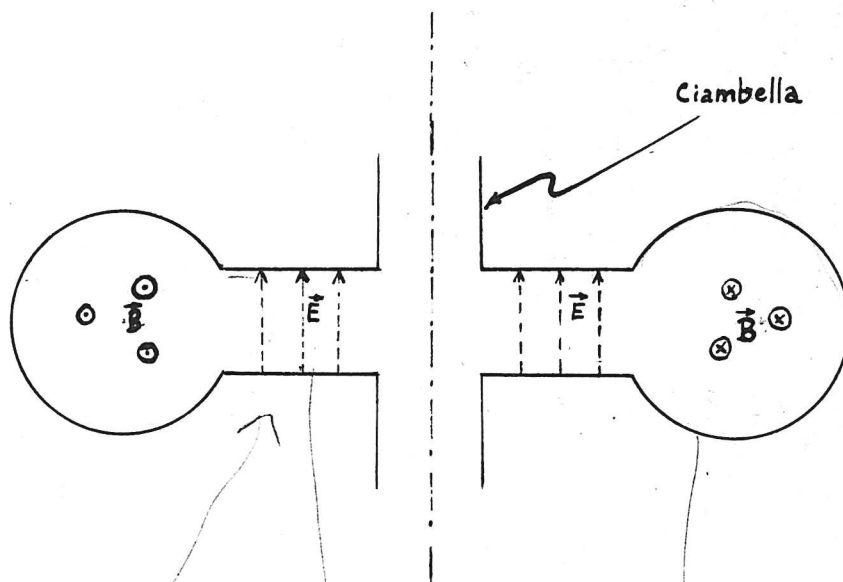


Fig. 39

Il funzionamento di una cavità risonante di questa forma si può facilmente comprendere con il ragionamento seguente. Consideriamo (fig. 40) un condensatore C formato da due piatti circolari,

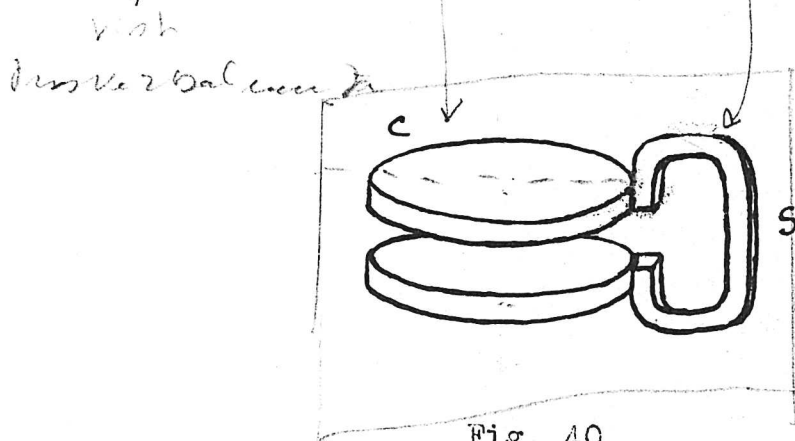


Fig. 40

e mettiamolo in corto circuito con una spira S. Questo è un circuito oscillante costituito da una capacità e da una induttanza (quella della S) in serie. Se quindi il condensatore, inizialmente carico, si fa scaricare attraverso la spira, questa sarà percorsa da una corrente alternata, e fra le armature di C si stabilirà un campo elettrico oscillante. Lo stesso avverrà evidentemente se invece di una sola spira ve ne saranno diverse in parallelo. Al limite ciò sarà vero ancora quando le spire saranno saldate insieme in modo da costituire un conduttore unico a forma di toro riottenendo così lo schema di fig. 39. In questo caso le linee di forza di \vec{E} e di \vec{B} hanno l'andamento mostrato nella figura stessa (*).

La d.d.p. nella cavità risonante sarà rappresentata da una formula del tipo

$$V(t) = U \text{ sen } \omega_e t \quad (\text{V.1.6})$$

e l'energia L_e acquistata da una particella in un giro risulta

$$L_e = |q| U \text{ sen } \omega_e t \quad (\text{V.1.7})$$

se essa traversa la cavità all'istante t.

Converremo di considerare $U > 0$ e V positiva se diretta in verso tale da accelerare le particelle.

Richiamandoci a quanto già detto nel § I-8., la pulsazione della r.f. deve essere uguale o multipla della velocità angolare delle particelle. Cioè deve essere

$$\omega_e = k \omega \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (\text{V.1.8})$$

(*) Notiamo che la cavità di fig. 39 si può considerare analoga ad un trasformatore in cui la corrente primaria è rappresentata dalla corrente alternata che percorre la parete della cavità e dalla corrente di spostamento che ne costituisce il prolungamento, mentre la secondaria è rappresentata dal fascio di particelle accelerate.

Ricordiamo inoltre che ω è legato a B attraverso la (I.8.2). Questa esprime anche la ω_e nel caso semplice visto nel § I-8, in cui $k=1$. Nel caso più generale ω_e dovrà dipendere da B secondo la

$$\omega_e = \frac{\overset{=K\omega}{\sqrt{k|q|B}}}{m \sqrt{1 + \left(\frac{eqBR}{E_0}\right)^2}} \quad (\text{V.1.9})$$

Il vantaggio di usare un $k > 1$ e quindi una frequenza più elevata (*) è che questo permette di ridurre le dimensioni della cavità.

Spesso nei sincrotroni, per rendere meno ampi gli intervalli di modulazione della cavità (cfr. § I-8 e fig. 5), si usano due cavità che entrano in funzione successivamente. Per particelle ultrarelativistiche (elettroni) la seconda cavità può essere a frequenza fissa $\nu = \frac{c}{2\pi R}$. Dal punto di vista pratico si trova infatti che l'esigenza di modulare la frequenza in un ampio intervallo e quella di dare una forte potenza sono contrastanti e sono difficili da soddisfare nella medesima cavità.

(*) Nei sincrotroni di Frascati e del CERN, k è stato scelto rispettivamente uguale a 4 ed a 20.

§ V-2. Fase di una particella. Particella sincrona.

Indichiamo con ϑ la distanza angolare di una particella dalla cavità ($\dot{\vartheta} = \omega$). Si definisce allora la fase φ della particella all'istante t per mezzo della relazione

$$\varphi = k\vartheta - \omega_e t + \pi$$

È chiaro che si continua a muovere per effetto per quindici d'angolo (V.2.1)

(il π è introdotto per ragioni di comodità). Si avrà

$$\dot{\varphi} = k\omega - \omega_e \quad (V.2.2)$$

e quindi se una particella ruota in modo da soddisfare esattamente la (V.1.8), per essa sarà $\dot{\varphi} = 0$ e la fase si manterrà costante. Tale particella è detta particella sincrona. Tutte le grandezze relative alla particella sincrona (p.s.) saranno contraddistinte da un indice s . Naturalmente non tutte le particelle seguono esattamente la (V.1.8): vedremo che la loro fase varia durante l'accelerazione.

L'interesse della fase di una particella sta nel fatto che essa determina l'incremento di energia L_e che la particella riceve nell'attraversare la cavità risonante. Infatti, poichè la cavità si trova a $\vartheta = 2\pi n$ ($n=0,1,2,\dots$), essa sarà traversata da una particella di fase φ agli istanti t_n tali che (cfr. (V.2.1))

$$\omega_e t_n = \pi + 2\pi n k - \varphi$$

Particella che ruota in modo che si attraversa la cavità (V.2.3) posta in una certa posizione angolare

da cui per la (V.1.7)

l'energia di particella

$$L_e = |q| U \sin \varphi \quad (V.2.4)$$

Ricaviamo ora alcune espressioni relative alla p.s. che saranno utili in seguito.

Riscrivendo la (IV.3.23) si ha (tenendo conto di (I.2.6))

$$\omega = - \frac{q B_z}{m_0 \gamma} = - \frac{q c^2 B_z}{E} \quad (V.2.5)$$

Per la p.s., valendo la (V.1.8), possiamo scrivere

$$\omega_s = \frac{1}{k} \omega_e \quad (\text{V.2.6})$$

e quindi

$$E_s = - \frac{q c^2 B_z}{\omega_s} = - \frac{k q c^2 B_z}{\omega_e} \quad (\text{V.2.7})$$

Inoltre dalla definizione $\omega = c\beta/r$, utilizzando la (I.2.10), per la p.s. si ha

$$r_s = \frac{kc}{\omega_e} \sqrt{1 - \left(\frac{E_o}{E_s}\right)^2} \quad (\text{V.2.8})$$

Nella progettazione della macchina si fa in modo che sia $r_s = R$ e con ciò, sostituendo (V.2.7) in (V.2.8), si ritrova (V.1.9).

Per una particella generica l'incremento di energia in un giro W può essere scritto sotto la forma $\frac{dE}{dt} T$ (in cui T è il periodo di rotazione), in quanto W è una grandezza piccola, trattabile come un differenziale, rispetto all'energia totale E delle particelle. La (V.1.3) diventa allora (ricordando la (V.2.4))

$$W = \frac{dE}{dt} T = |q| U \sin \varphi + L_{\beta} - L_r \quad (\text{V.2.9})$$

che per la p.s. si specifica in

$$W_s = \frac{dE_s}{dt} \frac{2\pi}{\omega_s} = - \frac{2\pi k^2 q c^2}{\omega_e} \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\omega_e} \right) = |q| U \sin \varphi_s + L_{\beta_s} - L_{r_s} \quad (\text{V.2.10})$$

Posto

$$- \frac{2\pi k^2 q c^2}{\omega_e} \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\omega_e} \right) - L_{\beta_s} + L_{r_s} = |q| u \quad (\text{V.2.11})$$

si ha

$$U \sin \varphi_s = u \quad (\text{V.2.12})$$

Notiamo che u in linea di principio è determinato dalle condizioni di funzionamento della macchina; attraverso la (V.2.12) esso determina la φ_s . Ricordando quanto accennato nel § I-8. (cioè che per il funzionamento della macchina U va scelto in modo opportuno) si vede che deve essere $U > u$. Sulla scelta di U torneremo nel § V-5.

La grandezza $|q|u$ è l'energia che la cavità deve comunicare alla p.s. in ogni giro per mantenerla in sincronismo.

§ V-3. Equazione della fase

Consideriamo ora una particella generica, prescindendo però sempre dalle oscillazioni di betatrone (che si trattano indipendentemente, nella maniera già vista nel Cap. IV). Per essa si è visto nel caso del betatrone che il momento della quantità di moto generalizzata $p = r(P_\vartheta + qA)$ è una costante del moto. Nel caso del sincrotrone non è più così. Calcoliamo infatti \dot{p} :

$$\dot{p} = \dot{r}P_\vartheta + r\dot{P}_\vartheta + q \frac{d}{dt}(rA) = \dot{r}P_\vartheta + r\dot{P}_\vartheta + q r \frac{\partial A}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial r}(rA) \dot{r} \quad (\text{V.3.1})$$

Essendo per la (III.2.4) e la (III.2.5)

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA) = rB_z \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -E_\vartheta \quad (\text{V.3.2})$$

e per orbite circolari (cfr. (IV.2.7))

$$P_\vartheta + qrB_z = 0 \quad (\text{V.3.3})$$

si ha infine

$$\dot{p} = r\dot{P}_\vartheta - qrE_\vartheta \quad (\text{V.3.4})$$

La grandezza $r\dot{P}_\vartheta$ è la derivata del momento della quantità di moto e quindi è uguale al momento M di tutte le forze agenti sulla particella; qrE_ϑ rappresenta il momento M_β della forza dovuta

al campo elettrico indotto per effetto di betatrone. La (V.3.4) si scrive quindi (*)

$$\dot{p} = M - M_{\beta} \quad (V.3.5)$$

Dalla (V.3.5) segue (integrando rispetto a ϑ su un giro)

$$\int_0^{2\pi} \dot{p} d\vartheta = \int_0^{2\pi} M d\vartheta - \int_0^{2\pi} M_{\beta} d\vartheta \quad (V.3.6)$$

I due integrali a secondo membro rappresentano rispettivamente il lavoro W compiuto in un giro da tutte le forze agenti sulla parti cella ed il lavoro L_{β} compiuto in un giro dal campo indotto. Per quel che riguarda il primo membro, possiamo scriverlo sotto la forma $2\pi \bar{\dot{p}}$. Si avrà dunque (cfr. (V.1.3) e (V.2.4))

$$2\pi \bar{\dot{p}} = W - L_{\beta} = L_e - L_r + L_{\beta} - L_{\beta} = |q| U \sin \varphi - L_r \quad (V.3.7)$$

L'andamento di p nel tempo è quello indicato in fig. 41, ove i salti bruschi avvengono in corrispondenza dei passaggi attraverso la cavità mentre le diminuzioni lente sono dovute all'irraggiamento.

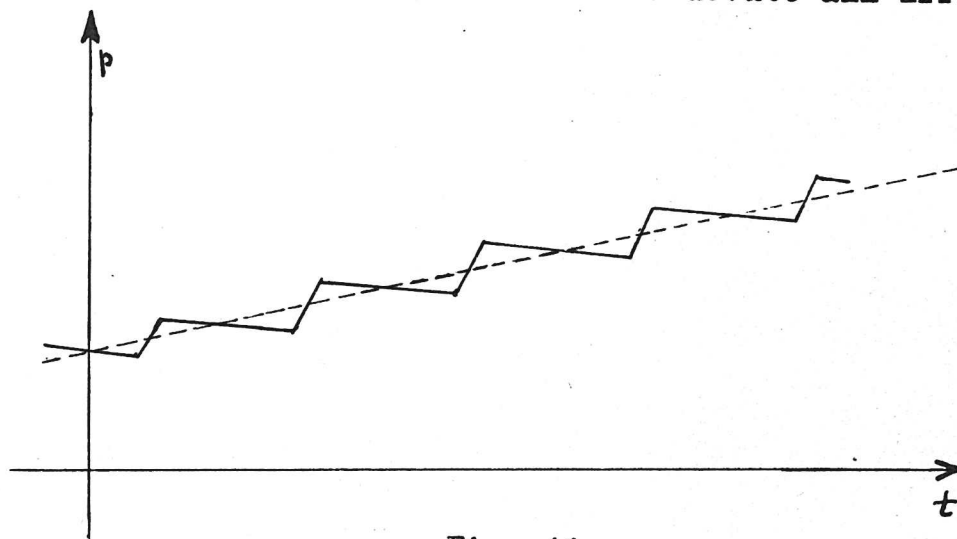


Fig. 41

(*) Per il betatrone, se si trascura l'irraggiamento (come si è fatto nel Cap. IV), poichè l'unica forza agente è il campo elettrico indotto, si ha $M \equiv M_{\beta}$, e quindi dalla (V.3.5) si ritrova $p = \text{cost.}$

Poichè la variazione percentuale di p in un giro è piccola, possiamo considerare approssimativamente un andamento continuo (linea tratteggiata) per cui \dot{p} sia praticamente costante su un giro. Con questa approssimazione si può nella (V.3.7) sostituire \dot{p} a \bar{p} .

$$2\pi\dot{p} = |q|U \text{ sen } \varphi - L_r \quad (\text{V.3.8})$$

Indichiamo ora con δX la differenza tra una grandezza qualsiasi X riferita alla particella generica (prescindendo dalle oscillazioni di betatrone) e la stessa grandezza riferita alla p.s. (per es. $\delta E = E - E_s$, etc.).

Supporremo che tali differenze siano piccole e le tratteremo come differenziali (*). Specificando la (V.3.8) per la p.s. e sottraendo l'uguaglianza così ottenuta dalla (V.3.8) stessa, si ha

$$2\pi\delta\dot{p} = |q|(U \text{ sen } \varphi - u) - \delta L_r \quad (\text{V.3.9})$$

Vedremo ora che $\delta\dot{p}$ può essere espresso mediante la fase φ . In questo modo la (V.3.9) diventerà un'equazione differenziale per φ . Calcoliamo dunque δp :

$$\delta p = \delta(rP_{\vartheta}) + q\delta(rA) = r\delta P_{\vartheta} + P_{\vartheta}\delta r + q\frac{\partial}{\partial r}(rA)\delta r \quad (\text{V.3.10})$$

ma $P_{\vartheta} = -q\frac{\partial}{\partial r}(rA)$ (cfr. (V.3.2), (V.3.3)), e quindi

$$\delta p = r\delta P_{\vartheta} \quad (\text{V.3.11})$$

Per le particelle che consideriamo, essendo $P_{\vartheta} \approx |\vec{P}|$ si può sopprimere l'indice ϑ . Se si applica l'operazione δ alla (I.2.8) si ottiene

$$c^2 P \delta P = E \delta E \quad (\text{V.3.12})$$

(*) Non introdurremo però il $\delta\varphi$, perchè $\varphi - \varphi_s$ non è in genere un angolo piccolo.

ed usando la (I.2.9) si ha

$$v \delta P = \delta E \quad (V.3.13)$$

Consideriamo ora la (V.2.5), prendiamo il logaritmo di ambo i membri ed applichiamo l'operazione δ . Facciamo la stessa cosa per la (V.1.1). Si ottiene

$$\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta E}{E} = \frac{\delta B_z}{B_z} \quad (V.3.14)$$

$$\frac{\delta B_z}{B_z} = -n \frac{\delta r}{r} \quad (V.3.15)$$

Da queste si ha

$$\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta E}{E} = -n \frac{\delta r}{r} \quad (V.3.16)$$

Consideriamo ora la (I.2.10), prendiamo il logaritmo di ambo i membri ed applichiamo l'operazione δ . Lo stesso facciamo per la definizione di ω , $\omega = \frac{c}{r} \beta$. Si ottiene (utilizzando ancora la (I.2.10))

$$\frac{\delta \beta}{\beta} = -\frac{\delta E}{E} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \quad (V.3.17)$$

$$\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta \beta}{\beta} \quad (V.3.18)$$

Da queste si ha

$$\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta r}{r} = -\frac{\delta E}{E} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \quad (V.3.19)$$

Eliminiamo ora $\frac{\delta r}{r}$ tra le (V.3.16), (V.3.19). Si ottiene infine

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = -\left(1 + \frac{n}{1-n} \frac{1}{\beta^2}\right) \frac{\delta E}{E} \quad (V.3.20)$$

La grandezza

$$K = 1 + \frac{n}{1-n} \frac{1}{\beta^2} \quad (V.3.21)$$

varia molto poco in un giro e si può considerare costante per particelle ultrarelativistiche (essa vale circa $1/(1-n)$).

Dalla (V.3.11) (con $P_{\dot{\varphi}} \equiv P$), (V.3.13) e (V.3.20), (V.3.21) segue

$$\delta p = -\frac{r}{v} \frac{E}{\omega} \frac{1}{K} \delta \omega = -\frac{E}{\omega^2 K} \delta \omega \quad (\text{V.3.22})$$

D'altra parte per la (V.2.6) e la (V.2.2) si ha

$$\delta \omega = \omega - \omega_s = \omega - \frac{\omega_e}{k} = \frac{\dot{\varphi}}{k} \quad (\text{V.3.23})$$

Quindi, essendo le operazioni δ e di derivazione rispetto al tempo indipendenti ($\frac{d}{dt} \delta p = \delta \dot{p}$), dalle (V.3.22), (V.3.23) segue

$$\delta \dot{p} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{E}{\omega^2} \frac{1}{kK} \dot{\varphi} \right] \quad (\text{V.3.24})$$

e sostituendo in (V.3.9)

$$-2\pi \frac{d}{dt} \left[\frac{E}{\omega^2} \frac{1}{kK} \dot{\varphi} \right] = |q| (U \sin \varphi - u) - \delta L_r \quad (\text{V.3.25})$$

Notiamo che nell'approssimazione in cui si considerano le differenze indicate con δ come differenziali si può sostituire E con E_s , ω con $\omega_s = \frac{\omega_e}{k}$. Si ottiene così l'equazione della fase

$$-2\pi k \frac{d}{dt} \left(\frac{E_s \dot{\varphi}}{K \omega_e^2} \right) = |q| (U \sin \varphi - u) - \delta L_r \quad (\text{V.3.26})$$

§ V-4. Discussione dell'equazione della fase

Discuteremo l'equazione differenziale per φ (V.3.26) sotto l'ipotesi che δL_r sia trascurabile e che E_s, K, ω_e varino in modo adiabatico (cioè lentamente rispetto alla variazione di φ): queste grandezze si potranno quindi togliere da sotto il segno di derivazione rispetto al tempo.

Ricordando la (V.2.12) si ottiene

$$\ddot{\varphi} = M \left(1 - \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \varphi_s} \right) \quad (\text{V.4.1})$$

ove

$$M = \frac{|g| K \omega_e^2 u}{2\pi k E_s} \quad (\text{V.4.2})$$

Questa equazione è la stessa che descrive il moto di un pendolo (rigido) forzato da un momento costante \mathcal{M} (per esempio realizzato

per mezzo di un peso P come in fig. 42). Tale sistema (se \mathcal{M} non supera un certo limite) ha due posizioni di equilibrio, una stabile (posizione A) ed una instabile (posizione B), in corrispondenza delle quali il momento \mathcal{M} è compensato dal momento della forza peso agente sul pendolo. La posizione di equilibrio stabile A corrisponde ad un angolo di elongazione del pendolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

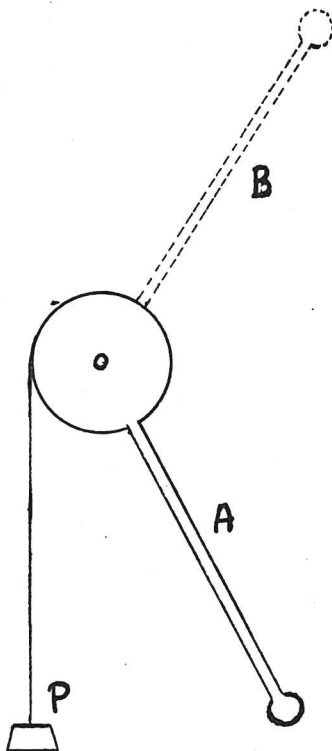


Fig. 42

Dalla (V.4.1) si vede che queste due posizioni di equilibrio corrispondono ai due angoli per cui $\sin \varphi = \sin \varphi_s$. Sarà posizione di equilibrio stabile quella per cui l'angolo è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Se vogliamo quindi che la p.s. si trovi nella regione di stabilità bisogna che $0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}$; cioè, ricordando la (V.2.3), la p.s. dovrà passare attraverso la cavità in fase di campo elettrico acceleratore decrescente ($\frac{\pi}{2} < \omega_e t_n < \pi$). Che così debba essere si vede anche qualitativamente. Infatti una particella che ritardi sulla p.s. riceve dalla cavità (dato che il campo è in fase decrescente) un'energia minore che la p.s., compie un'orbita di raggio inferiore e, poichè la velocità della particella è praticamente costante ($\beta \approx 1$), impiega un tempo minore e diminuisce così il proprio ritardo dalla p.s.. In fase di campo crescente sarebbe successo l'opposto (*).

Consideriamo ora nuovamente il pendolo di fig. 42. Se il sistema si scosta dalla posizione di equilibrio stabile, esso oscilla attorno ad essa con moto periodico non armonico. Se lo scostamento supera certi limiti si possono avere moti non periodici. Corrispondentemente la fase di una particella generica può oscillare intorno alla fase della p.s. oppure allontanarsi da essa indefinitivamente.

Possiamo procurarci un integrale primo della (V.4.1) moltiplicandola per $\dot{\varphi} dt$ ed integrando: otteniamo

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = M \left(\varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi_s} \right) + \text{cost.} \quad (\text{V.4.3})$$

Ponendo

$$f(\varphi) = -\varphi - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi_s} \quad (\text{V.4.4})$$

la (V.4.3) si scrive

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = M (f_0 - f(\varphi)) \quad (\text{V.4.5})$$

ove f_0 è una costante.

(*) Cfr. il ragionamento fatto nel § I-5. a proposito della stabilità di fase negli acceleratori lineari.

La (V.4.5) costituisce un integrale primo dell'equazione (V.4.1) (nel modello del pendolo sarebbe l'integrale delle forze vive). Per seguire intuitivamente le variazioni di φ descritte dalla (V.4.5) si può ricorrere al seguente modello approssimato. Si consideri una pallina pesante vincolata a scorrere senza attrito su un profilo rappresentabile dalla funzione $y = \frac{M}{g} f(\varphi)$ (cfr. fig. 43), ove g è l'accelerazione di gravità.

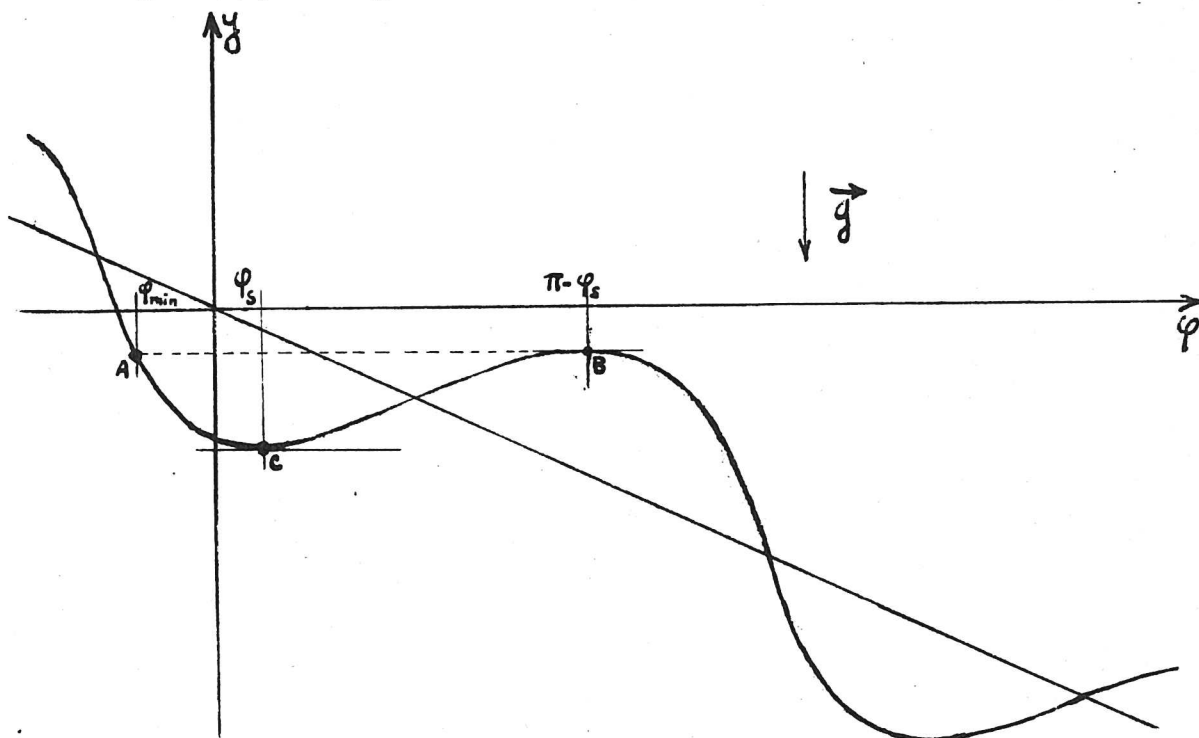


Fig. 43

L'integrale delle forze vive per questa pallina è

$$\dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2gy = \text{cost.} \quad (\text{V.4.6})$$

Supponiamo che la pendenza sia dappertutto così lieve da poter trascurare \dot{y}^2 rispetto a $\dot{\varphi}^2$ (*): in tal caso il moto della pallina è descritto (per la definizione di y) proprio dalla (V.4.5). In fig. 43 i punti di minimo e di massimo C, B rappresentano le posizioni di equilibrio rispettivamente stabile ed instabile.

(*) A questa condizione ci si può avvicinare quanto si vuole, supponendo, nel modello, la g abbastanza grande.

Se la sua energia cinetica non è troppo alta, la pallina potrà restare tra A e B compiendo oscillazioni non simmetriche intorno a C. Questo corrisponde ad una particella la cui fase oscilla intorno a φ_s nell'intervallo da $\varphi = \varphi_{\min}$ a $\varphi = (\pi - \varphi_s)$. E si noti che, poichè dalla (V.2.1) si ha

$$\varphi - \varphi_s = k(\vartheta - \vartheta_s) \quad , \quad (V.4.7)$$

queste oscillazioni di fase corrispondono ad oscillazioni di posizione nella direzione azimutale relativamente alla p.s.. Se la pallina esce dalla zona AB, essa finirà con l'allontanarsi indefinitivamente verso le φ crescenti. Questo corrisponde ad una particella la cui fase si allontana dalla fase della p.s.. Come vedremo tra poco, tale particella va ad urtare contro le pareti della ciambella.

§ V-5. Oscillazioni di sincrotrone

Le oscillazioni di fase (cioè di ϑ attorno a ϑ_s) che abbiamo considerato nel paragrafo precedente sono accompagnate da oscillazioni radiali, che si chiamano oscillazioni di sincrotrone perchè sono caratteristiche di questa macchina.

Infatti si consideri la condizione di orbita circolare (IV.2.7) e si applichi a questa l'operazione δ dopo averne fatto il logaritmo. Si trova, ricordando la (V.3.15)

$$\frac{\delta P_\vartheta}{P_\vartheta} \equiv \frac{\delta P}{P} = \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta B_z}{B_z} = (1-n) \frac{\delta r}{r} \quad (V.5.1)$$

Utilizzando le (V.3.11), (V.3.22), (V.3.23) si ottiene

$$\delta r = - \frac{k E_s}{(1-n) K \omega_e^2 P_s} \dot{\varphi} \quad (V.5.2)$$

in cui abbiamo sostituito, come nel § V-3., a E, ω, P le grandezze corrispondenti riferite alla p.s.. Dalla (I.2.8) moltiplicata per β si ha

$$\beta^2 E = \frac{r v P}{r} = r \omega P \quad (V.5.3)$$

Specializziamo questa uguaglianza per la p.s. ($r_s = R$) e sostituiamo nella (V.5.2); si ottiene

$$\delta r = - \frac{R}{\beta^2 (1-n) K \omega_e} \dot{\varphi} \quad (V.5.4)$$

Da questa relazione si vede che le particelle non sincrone (per cui $\dot{\varphi} \neq 0$) presentano anche uno scostamento radiale rispetto alla p.s..

Per particelle di fase oscillante, $\dot{\varphi}$ è limitato e quindi anche δr non eccederà un certo valore; quindi, se la ciambella è sufficientemente larga, tali particelle non urteranno contro la parete. Invece per le particelle la cui fase cresce indefinitamente, anche $\dot{\varphi}$ cresce indefinitamente (cfr. (V.4.5) e fig. 43); quindi δr aumenterà finchè esse urteranno contro la parete della ciambella.

Sostituendo la (V.4.5) nella (V.5.4) si ottiene in definitiva

$$\delta r = \pm \text{cost} \sqrt{f_0 - f(\varphi)} \quad (V.5.5)$$

Se si fa un grafico della funzione $\pm \sqrt{f_0 - f(\varphi)}$ (per un fissato valore di φ_s) su un piano cartesiano si ottiene, per i diversi valori di f_0 , una famiglia di curve del tipo di quelle indicate in fig. 44, che si riferisce a $\varphi_s = 45^\circ$ (*). La curva tratteggiata (che separa le curve chiuse da quelle aperte) corrisponde a $f_0 = f(\pi - \varphi_s) = -\pi + \varphi_s + \text{ctg} \varphi_s$.

(*) Si noti che questo diagramma, per ogni φ_s , ha carattere universale; cioè non dipende dalle caratteristiche della macchina, le quali entrano solo nella costante moltiplicativa della (V.5.5).

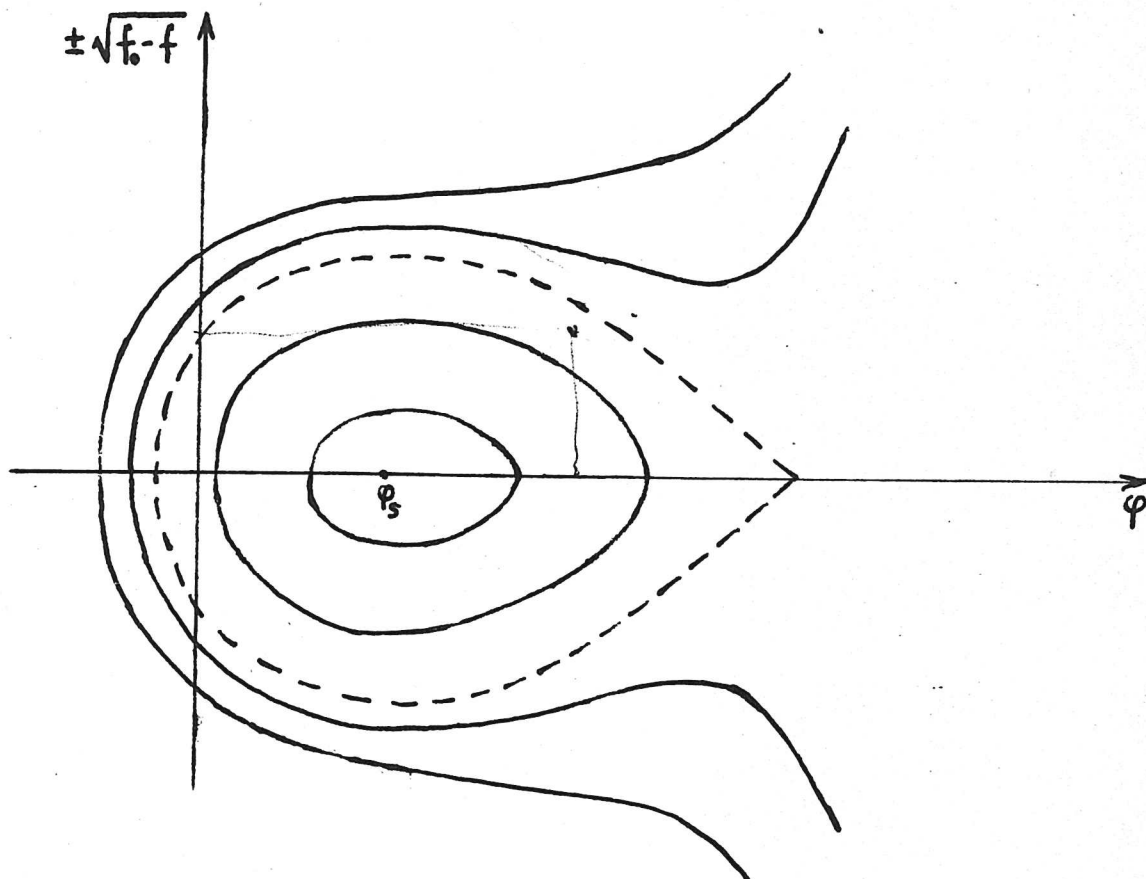


Fig. 44

Poichè $(\varphi - \varphi_s)$ è proporzionale a $(\vartheta - \vartheta_s)$ per la (V.4.7), e quindi allo spostamento della particella rispetto alla p.s. nella direzione azimutale, le curve di fig. 44 possono interpretarsi come effettive traiettorie delle particelle non sincrone nel sistema di riferimento della p.s. (a meno di una dilatazione lungo l'asse delle ordinate ed una lungo l'asse delle ascisse). Le varie traiettorie corrispondono a diverse condizioni iniziali. Si vede che solo le particelle che si trovano all'interno della curva tratteggiata rimangono nelle vicinanze della p.s., formando un pacchetto che ha la forma della curva tratteggiata stessa. Le altre particelle vanno perdute.

Ricordiamo che alle oscillazioni di sincrotrone si sovrappongono quelle di betatrone che, come vedremo, sono molto più rapide. A causa di ciò le traiettorie di fig. 44 assumono la forma schematicamente indicata in fig. 45.

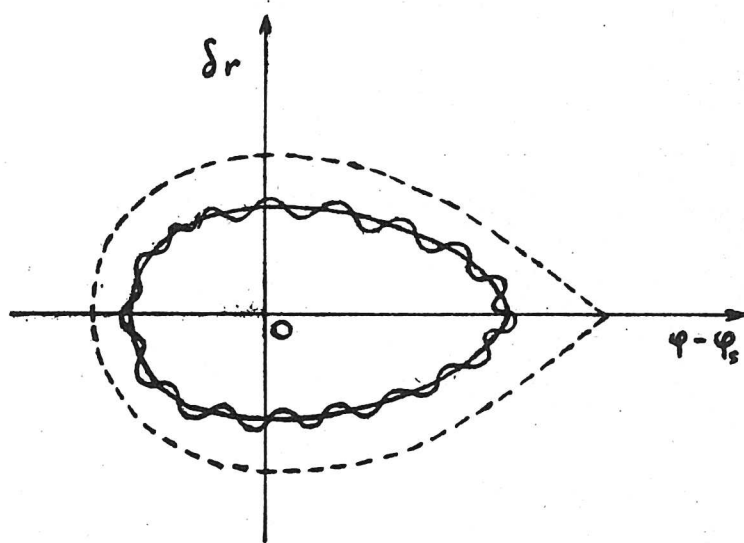


Fig. 45

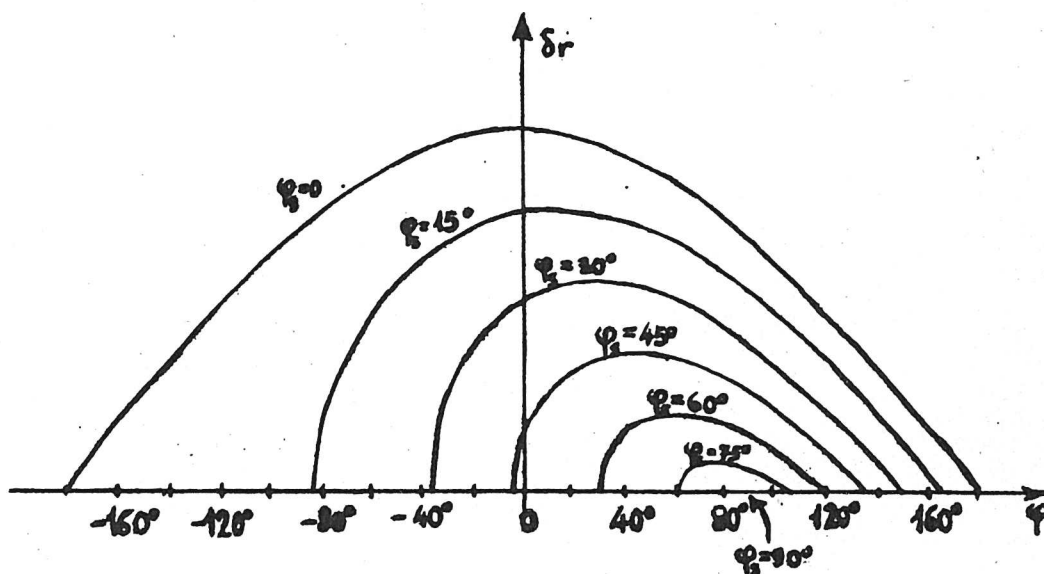


Fig. 46

Anche le oscillazioni di sincrotrone, come vedremo, si smorzano durante l'accelerazione, e le dimensioni del pacchetto si riducono.

Abbiamo già visto che la fase sincrona φ_s deve essere compresa tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Vediamo ora quali sono i criteri che consigliano la scelta di un particolare valore in questo intervallo. (Ricordiamo che, essendo u determinato dalle caratteristiche della macchina, la (V.2.12) mostra che la scelta di φ_s si riduce sostanzialmente alla scelta di U).

In fig. 46 è riportato nel piano $(\delta r, \varphi)$ un grafico in cui si rappresentano (*) le frontiere della zona di stabilità, cioè le forme del pacchetto, per diversi valori di φ_s . Si vede che se φ_s è troppo grande, la zona di stabilità è piccola. D'altra parte prendere φ_s troppo piccolo implica (oltre ad un valore di U elevato che può dar luogo a difficoltà tecniche) una maggiore ampiezza delle oscillazioni radiali. Inoltre si può vedere che per avere un "optimum" per lo smorzamento bisogna che le oscillazioni di sincrotrone e di betatrone si smorzino con la stessa rapidità: ma questo non è possibile per φ_s troppo piccoli. In pratica si sceglie φ_s intorno ai $30^\circ \sim 45^\circ$, e questa condizione determina il valore di U .

§ V-6. Caso delle piccole oscillazioni

Consideriamo ora il caso particolare in cui φ si scosti molto poco da φ_s , in modo che, posto

$$\varphi = \varphi_s + \psi \quad (V.6.1)$$

si possa considerare ψ come piccolo e quindi si possa porre

$$\text{sen } \varphi = \text{sen } \varphi_s \cos \psi + \text{sen } \psi \cos \varphi_s \approx \text{sen } \varphi_s + \psi \cos \varphi_s \quad (V.6.2)$$

In questo caso la (V.4.1) si scrive

$$\ddot{\psi} = -M \cotg \varphi_s \psi \quad (V.6.3)$$

(*) Le curve sono simmetriche rispetto all'asse φ . (Da: BOHM, FOLDY - The theory of the Synchrotron - Phys. Rev. 70, 249 (1946)).

Questa è l'equazione dei moti armonici^(*), con soluzione

$$\psi = \psi_{\max} \operatorname{sen}(\Omega t + \operatorname{cost.}) \quad (\text{V.6.4})$$

ove la pulsazione Ω è data da

$$\Omega^2 = M \operatorname{cotg} \varphi_s = \frac{|q| K \omega_e^2 u}{2\pi k E_s} \operatorname{cotg} \varphi_s \quad (\text{V.6.5})$$

Per avere un'idea della grandezza di Ω , confrontiamola con

$$\omega = \omega_e/k. \text{ Si ha } \frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{\frac{|q| u k K}{2\pi E_s} \operatorname{cotg} \varphi_s} \quad (\text{V.6.6})$$

La grandezza $\frac{K k}{2\pi} \operatorname{cotg} \varphi_s$ è generalmente dell'ordine dell'unità.

Quindi

$$\frac{\Omega}{\omega} \approx \sqrt{\frac{|q| u}{E_s}} \quad (\text{V.6.7})$$

da cui si vede che, essendo $|q|u$ (energia acquistata dalla p.s. in un giro) molto piccola rispetto a E_s , le oscillazioni di fase sono molto lente, e durante una di tali oscillazioni si compiono molti giri (da 200 a 2000).

Lo scostamento δr è dato da

$$|\delta r| = \frac{R |\dot{\varphi}|}{\beta^2(1-n)K \omega_e} \approx \frac{R}{\omega_e} |\dot{\varphi}| \quad (\text{V.6.8})$$

in quanto $\beta^2(1-n)K = \beta^2(1-n) + n \approx 1$ per $\beta^2 \approx 1$.

Ossia

$$|\delta r| = \frac{R}{\omega_e} \Omega \psi_{\max} |\cos(\Omega t + \operatorname{cost.})| \leq R \psi_{\max} \frac{\Omega}{\omega_e} \quad (\text{V.6.9})$$

Trattiamo ora, in analogia con quanto si è fatto per il betatrone, lo smorzamento delle oscillazioni di sincrotrone. A tale scopo consideriamo la (V.3.26) e teniamo conto della variazione di E_s nel tempo. Consideriamo invece costanti ω_e , K , come è lecito quando $\beta \sim 1$. In questo modo si giunge all'equazione

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{E}_s}{E_s} \dot{\varphi} = M \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_s}\right) \quad (\text{V.5.10})$$

(*) Infatti, dato che $0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cotg} \varphi_s > 0$.

che per $\dot{E}_s = 0$ si riduce alla (V.4.1).

Nel caso delle piccole oscillazioni, con la posizione (V.6.1) si ha

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{E}_s}{E_s} \dot{\psi} + \Omega^2 \psi = 0 \quad (\text{V.6.11})$$

Ricordando la definizione di Ω (V.6.5) otteniamo nella nostra approssimazione

$$\frac{\dot{E}_s}{E_s} = -2 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \quad (\text{V.6.12})$$

e la (V.6.11) diventa

$$\ddot{\psi} - 2 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \dot{\psi} + \Omega^2 \psi = 0 \quad (\text{V.6.13})$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$\psi = \psi_{\max}(t) \text{sen} \left(\int_0^t \Omega(\tau) d\tau + \text{cost.} \right) \equiv \psi_{\max} \text{sen} \phi(t) \quad (\text{V.6.14})$$

ove $\dot{\psi}_{\max}$ e $\dot{\Omega}$ verranno considerate grandezze piccole del primo ordine. Procedendo in stretta analogia con il procedimento svolto nel § IV-5 per il betatrone, sostituiamo (V.6.14) in (V.6.13) e trascuriamo i termini piccoli del secondo ordine. Otteniamo così

$$(2 \dot{\psi}_{\max} \Omega + \psi_{\max} \dot{\Omega} - 2 \psi_{\max} \dot{\Omega}) \cos \phi(t) = 0 \quad (\text{V.6.15})$$

da cui

$$2 \frac{\dot{\psi}_{\max}}{\psi_{\max}} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = 0 \quad (\text{V.6.16})$$

Si vede quindi integrando che l'ampiezza ψ_{\max} dell'oscillazione è proporzionale a $\Omega^{1/2}$ e quindi (per la (V.6.5)) a $E^{-1/4}$. Dalla (V.6.9) segue inoltre che l'ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone è proporzionale a $E^{-3/4}$ (poichè Ω è proporzionale a $E^{-1/2}$).

Questo risultato è estendibile qualitativamente anche alle oscillazioni non piccole.

§ V-7. L'iniezione nel sincrotrone

Ci occuperemo ora dell'iniezione nel sincrotrone delle particelle da accelerare. I tipi di iniezione in un sincrotrone sono sostanzialmente due. Il metodo oggi più usato consiste nel l'iniettare le particelle ad una velocità abbastanza elevata per mezzo di un acceleratore elettrostatico (oppure, per le macchine più grosse, per mezzo di un acceleratore lineare), affinché non sia necessaria una modulazione di frequenza troppo ampia. Il secondo metodo (usato in certi sincrotroni per elettroni) consiste nell'iniettare le particelle a bassa energia, ma far funzionare la macchina inizialmente come un betatrone ed accendere la cavità a r.f. solo quando le particelle hanno raggiunto una velocità elevata.

Occupiamoci ora del primo tipo di iniezione, cioè quello ad alta energia. Il fascio (di alta intensità) che proviene dall'iniettore viene immesso nella ciambella (per un breve tempo) attraverso un deflettore (elettrostatico per ridurre l'ingombro), situato entro la ciambella stessa dalla parte più esterna. L'iniezione avviene in fase di campo magnetico crescente e precisamente all'istante in cui B_z soddisfa la relazione $B_z = \frac{P_d}{|q| r_d}$ in cui r_d è il raggio a cui si trova il deflettore e P_d è la quantità di moto delle particelle iniettate. Durante l'iniezione la cavità a r.f. è spenta e quindi le particelle per effetto dell'aumento di B spiralizzano verso l'interno. Questo permette ad esse di non urtare contro il deflettore dopo il primo giro.

Per avere un'intensità abbastanza elevata si inizia l'iniezione quando il raggio istantaneo r_i è uguale a r_d e la si prolunga per un certo tempo durante il quale (poiché B cresce) le particelle hanno $r_i < r_d$ e compiono perciò oscillazioni di betatrone intorno al cerchio istantaneo di raggio r_i con ampiezza circa uguale a $(r_d - r_i)$. Si cessa l'iniezione quando

questa grandezza è uguale alla semilarghezza della ciambella. Infatti se si continuasse ancora ad iniettare particelle, esse urterebbero contro la parete interna della ciambella durante la prima oscillazione. Quando termina l'iniezione si accende bruscamente la cavità ed il raggio istantaneo non cambia più.

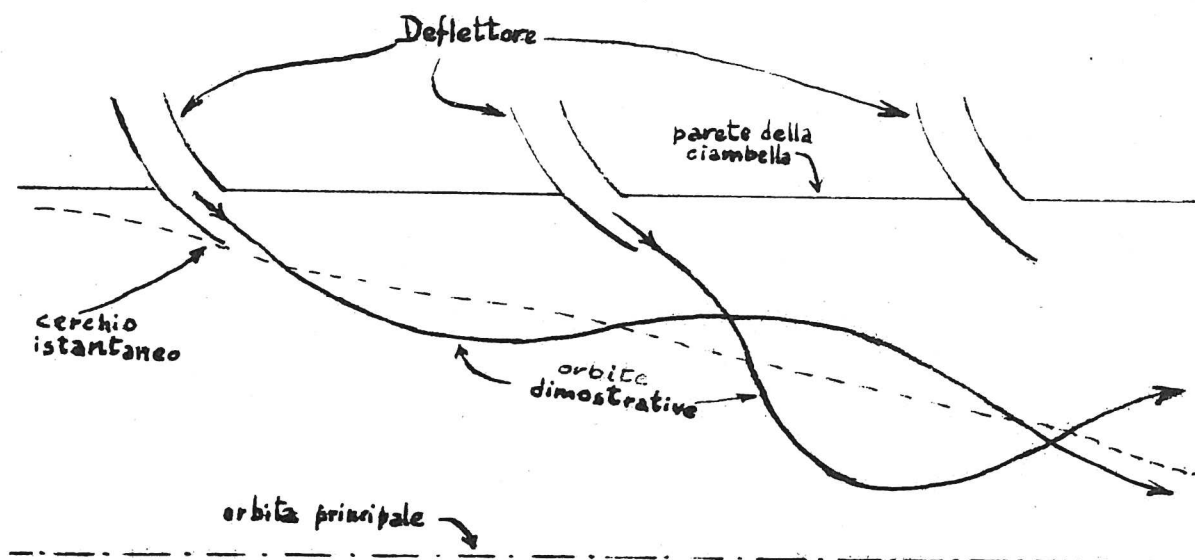


Fig. 47

Per illustrare il meccanismo dell'iniezione rappresentiamo in fig.47 sulla ciambella rettificata due orbite dimostrative di due particelle iniettate a distanza di un periodo.

Come si è detto, il raggio istantaneo deve diminuire abbastanza rapidamente perchè le particelle non urtino contro il deflettore dopo il primo giro. D'altra parte esso deve diminuire abbastanza lentamente per avere un maggiore tempo utile per l'iniezione e quindi, a parità di intensità della sorgente, un maggior numero di particelle utilizzabili. La rapidità della variazione di r_1 dipende da \dot{B}_z . Infatti derivando rispetto al

tempo la condizione di orbita circolare (IV.2.7), ricordando la (V.1.1) e tenendo presente che durante l'iniezione P resta costante, si ottiene

$$\dot{r}_i = - \frac{r_i}{1-n} \frac{\dot{B}_0}{B_0} \approx - \frac{R}{1-n} \frac{\dot{B}_0}{B_0} \quad (\text{V.7.1})$$

Il tempo impiegato a percorrere un giro è $\tau \approx \frac{2\pi R}{v}$; quindi la diminuzione di r_i in un giro (detta spiralizzazione) è data da

$$\sigma = -\tau \dot{r}_i \approx \frac{2\pi R^2}{(1-n)v} \frac{\dot{B}_0}{B_0} \quad (\text{V.7.2})$$

La prima condizione cui deve soddisfare \dot{B}_0 durante l'iniezione è che σ sia più grande della dimensione d'ingombro del deflettore, $d^{(*)}$. Cioè

$$\frac{\dot{B}_0}{B_0} > \frac{vd(1-n)}{2\pi R^2} \quad (\text{V.7.3})$$

La seconda condizione cui deve soddisfare \dot{B}_0 è che il numero di particelle utilizzate N sia il più grande possibile (generalmente $> 10^8 - 10^9$). Detta Q la portata della sorgente (numero di particelle iniettate per unità di tempo) e $a/2$ la semilarghezza della ciambella, si ha $N = Qa/2|r'_i|$ e quindi

$$N = \frac{Qa}{2|r'_i|} = \frac{Qa}{2R} (1-n) \frac{\dot{B}_0}{B_0} \quad (\text{V.7.4})$$

da cui si vede che N cresce col diminuire di \dot{B}_0 .

In pratica si sceglie il valore di \dot{B}_0 all'istante dell'iniezione il più piccolo possibile compatibilmente con la (V.7.3). Per realizzare questo si può aggiungere al campo magnetico alternato un campo magnetico costante (bias) in modo che l'andamento del campo nel tempo sia del tipo di quello indicato in fig.48.

(*) Tale dimensione è determinata dallo spessore del bordo del deflettore, dalla sezione del fascetto uscente e dalla sua posizione rispetto a tale bordo.

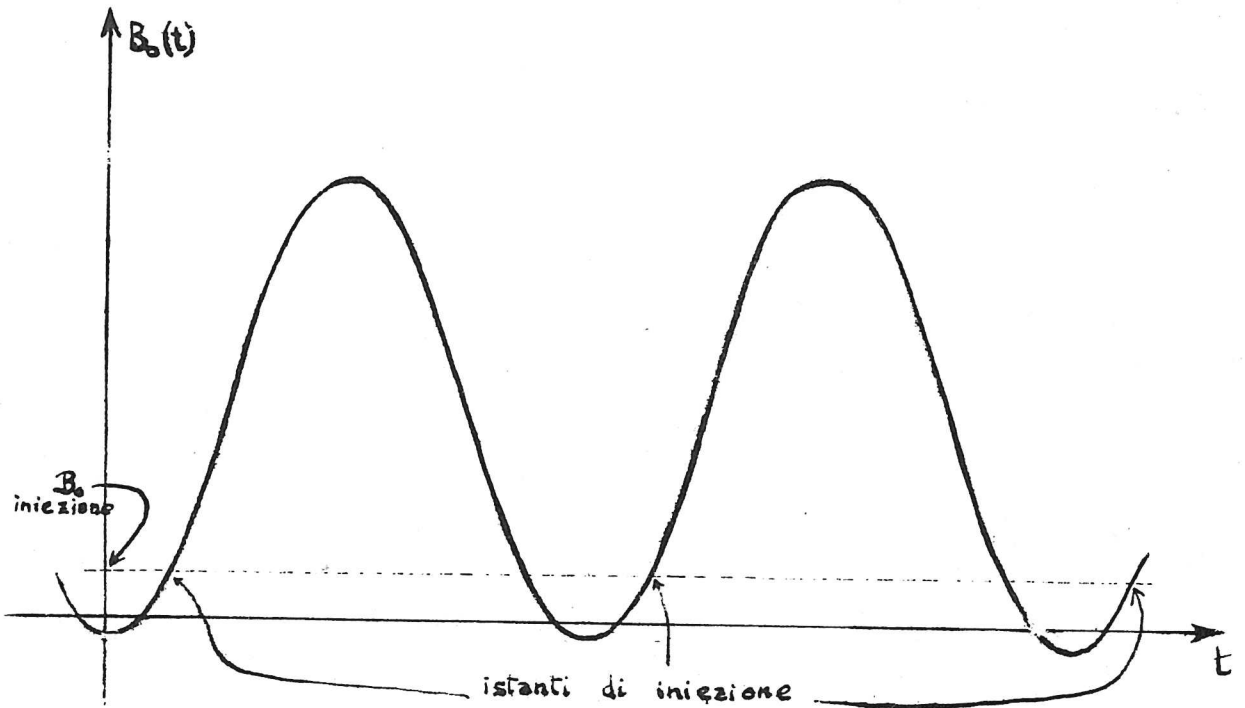


Fig. 48

L'accensione della r.f., come abbiamo detto, arresta la contrazione del cerchio istantaneo e lo fissa sull'orbita principale. All'istante dell'accensione le particelle si trovano distribuite in modo praticamente uniforme lungo tutta la ciambella e quindi hanno tutte le possibili fasi, ed inoltre eseguono oscillazioni di betatrone con tutte le possibili ampiezze. Il valore U della tensione della cavità determina (cfr. (V.2.12)) la fase sincrona φ_s , e quindi la famiglia di curve della fig.44. Le particelle che all'istante dell'accensione si trovano entro la curva tratteggiata cominciano le oscillazioni di sincrotrone intorno alla p.s.. Le altre vanno a finire contro le pareti. Tuttavia anche una parte delle prime va perduta, cioè tutte quelle per cui l'ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone sommata a quella della preesistente oscillazione di betatrone supera la semilarghezza della ciambella. Si tratterà quindi soprattutto delle particelle iniettate tardivamente, che compiono oscillazioni di betatrone di ampiezza maggiore. Altre particelle andranno perdute per urti contro le molecole del gas residuo: questo effetto è sensibile solo nella prima fase dell'accelerazio

ne. In definitiva soltanto una piccola frazione delle particelle iniettate viene catturata; però quasi tutte queste giungono poi alla fine dell'accelerazione, perchè il rapido smorzamento delle oscillazioni riduce notevolmente le perdite.

Notiamo che all'accensione della cavità, se $\omega = \frac{\omega_e}{k}$, si trovano simultaneamente nella ciambella k particelle sincrone ed attorno a queste si formano altrettanti pacchetti.

Per concludere parliamo ora del tipo di iniezione a betatrone. Esso può essere usato nei sincrotroni per elettroni in cui il C del magnete è rivolto verso l'interno della macchina. Si chiude il circuito magnetico (v. fig.49) con delle barre (dette barre di flusso) di materiale e di dimensioni tali da realizzare la relazione di betatrone (I.4.7) nella fase iniziale dell'accelerazione e da entrare in saturazione quando le particelle hanno raggiunto una certa energia. A questo punto si eccita gradualmente la cavità a r.f..

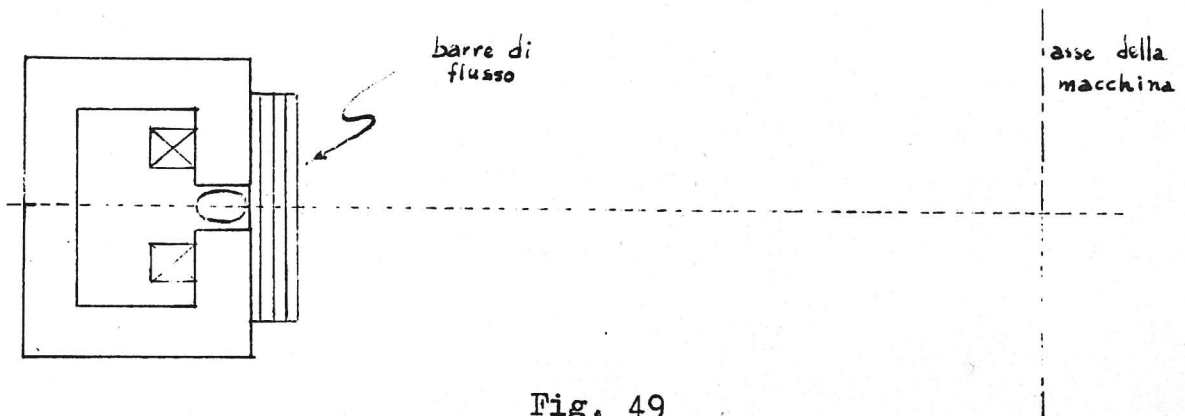


Fig. 49

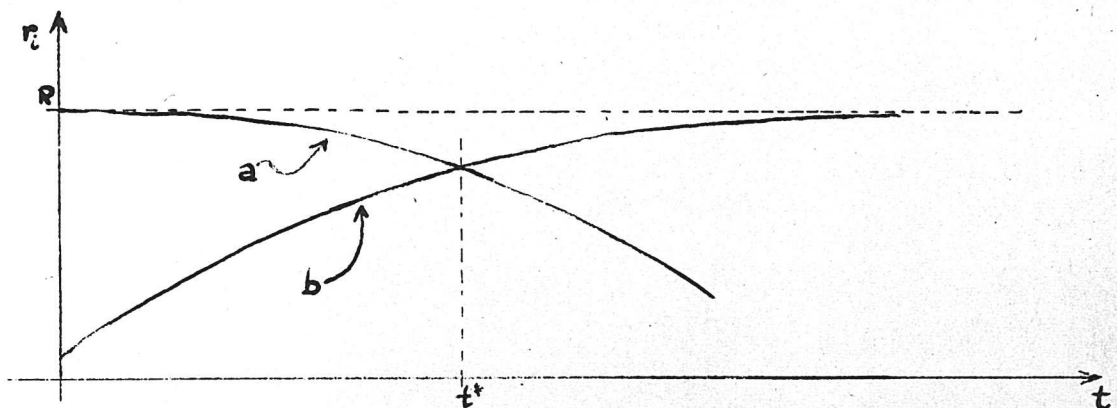


Fig. 50

In fig. 50 riportiamo l'andamento del raggio istantaneo

- a) nel caso in cui vi siano le barre di flusso in assenza di cavità;
- b) nel caso in cui le particelle siano accelerate dalla cavità (che si può prendere a frequenza fissa) in assenza di barre di flusso.

La cavità si accende all'istante t^* che è il più opportuno per il passaggio dal funzionamento a betatrone a quello a sincrotrone. Conviene che l'ampiezza della tensione alternata U salga con relativa lentezza, in modo che, via via che decresce la forza acceleratrice di betatrone, cresca in ugual misura quella di sincrotrone: si riesce allora a catturare gran parte degli elettroni circolanti nella ciambella, i quali, dapprima distribuiti uniformemente, vengono gradualmente raggruppati in k pacchetti.

Per la difficoltà di realizzare la transizione dall'accelerazione a betatrone a quella a sincrotrone, che è piuttosto critica, si preferisce oggi a questo metodo l'iniezione ad alta energia.

Nel § I-8 abbiamo detto che generalmente i sincrotroni contengono dei tratti rettilinei, privi di campo magnetico (race-track). Rimandiamo al capitolo seguente la trattazione di questo tipo di sincrotrone, dato che il formalismo matematico ivi sviluppato rende tale trattazione più semplice.

§ V-8. Effetti di risonanza

Per quanto detto finora, l'indice del campo n può avere qualsiasi valore compreso tra 0 e 1. Tuttavia vi sono in questo intervallo alcuni valori (teoricamente infiniti) che devono essere evitati perchè danno luogo a "risonanze" tra le oscillazioni di betatrone radiali, quelle verticali e (eventualmente) il moto di rotazione, e compromettono così la stabilità del fascio.

Si dice che vi è risonanza se le frequenze del moto orbitale, delle oscillazioni verticali e di quelle radiali sono legate da una relazione del tipo

$$p\omega + q\omega_z + r\omega_r = 0 \quad (\text{V.8.1})$$

ove p, q, r sono numeri interi, positivi, negativi o nulli. Ricordando le espressioni (V.1.5) di ω_z, ω_r si ha

$$p + q\sqrt{n} + r\sqrt{1-n} = 0 \quad (\text{V.8.2})$$

In pratica interessano solo i casi in cui questi interi sono piccoli (per esempio compresi tra -4 e 4) e soprattutto i casi in cui uno di essi è nullo; vanno evitati, cioè, i valori di n per cui uno almeno dei seguenti rapporti

$$\frac{\omega_z}{\omega} = \sqrt{n} ; \frac{\omega_r}{\omega} = \sqrt{1-n} ; \frac{\omega_r}{\omega_z} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} \quad (\text{V.8.3})$$

sia un numero razionale semplice.

In realtà la risonanza non sarebbe dannosa se le oscillazioni verticali e radiali fossero rigorosamente indipendenti tra loro e dal moto orbitale, come sono state trattate. Tuttavia ciò non è esatto a causa delle piccole, inevitabili irregolarità del campo magnetico. Una di queste in genere influenza sia il moto radiale che quello verticale simultaneamente, e quindi introduce una specie di collegamento ("accoppiamento") tra i due tipi di oscillazione: si pensi al modello costituito da due pendoli appesi ad un sostegno non perfettamente fisso, per cui l'energia

di oscillazione di un pendolo può passare all'altro. Se uno dei due pendoli è inizialmente fermo mentre l'altro oscilla, avviene che il primo si mette ad oscillare con ampiezza sempre maggiore, mentre l'altro gradatamente si ferma (dopodichè le parti si invertono). Ciò avviene tanto più rapidamente quanto più piccoli sono i termini del rapporto di risonanza. Fenomeni analoghi avvengono per le oscillazioni di betatrone: una di esse può aumentare gradatamente di ampiezza a spese dell'altra o dell'energia di rotazione.

Aggiungiamo, a titolo di esempio, una tabella dei valori di n che danno risonanza tra le oscillazioni radiali e verticali. Questi sono dati (cfr. (V.8.3)) da $\sqrt{\frac{1-n}{n}} = \frac{q}{r}$ cioè $\frac{1}{n} = 1 + \frac{q^2}{r^2}$.

$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ q \end{array}$	1	2	3
1	0,5	0,8	0,9
2	0,2	0,5	0,692 (V.8.4)
3	0,1	0,308	0,5
.			

Generalmente si sceglie $n=0,6^{(*)}$.

(*) Tutte le considerazioni svolte in questo paragrafo si applicano anche al betatrone. Tuttavia per quest'ultimo esse hanno un'importanza minore che nel sincrotrone: infatti il rapporto tra la sezione della ciambella ed il raggio della ciambella stessa è per il betatrone molto più grande, e quindi sono tollerate oscillazioni più ampie.

§ V-9. Realizzazione del campo magnetico del sincrotrone

Una delle maggiori difficoltà tecniche nella costruzione di un sincrotrone è quella di ottenere che il campo magnetico, in tutta la regione in cui si muovono le particelle e per tutta la durata del ciclo di accelerazione, abbia esattamente l'andamento voluto, dipendente dall'indice del campo n che si è scelto. Ciò si ottiene in prima approssimazione sagomando opportunamente le superfici dei poli (v. fig.51): la leggera sva-

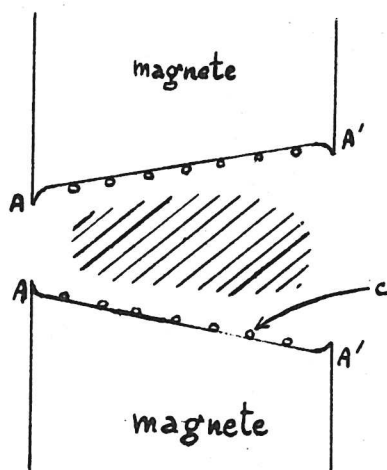


Fig. 51

satura verso l'esterno (esagerata in figura) determina il valore di n , mentre i rilievi AAA'A' servono a correggere parzialmente gli effetti dei bordi. Il profilo esatto si determina per tentativi, prima mediante una vasca elettrolitica e poi su un modello a scala ridotta, alimentato a corrente continua. Si ottiene co-

sì che il campo abbia la distribuzione voluta in tutta la regione in cui si muoveranno le particelle (area tratteggiata in fig.51). Questa distribuzione viene però turbata, nel funzionamento a corrente alternata, da tre cause:

- a) magnetizzazione residua dal ciclo precedente;
- b) correnti di Foucault nei poli e nelle pareti della ciambella;
- c) saturazione parziale del ferro.

Gli effetti a) e b) si manifestano a bassi valori del campo (e quindi in particolare durante l'iniezione e poco dopo, quando cioè le oscillazioni sono più ampie ed il fascio attra-

versa i momenti più critici); l'effetto c) si manifesta invece verso la fine del ciclo di accelerazione, quando il fascio è già divenuto sottile: basta quindi evitarlo in un'area centrale molto stretta.

Per correggere queste perturbazioni si ricorre alle "bobine correttrici" (correcting coils). Sono questi dei fili (parecchie decine) che corrono paralleli alla ciambella lungo la superficie dei poli (uno di questi è indicato con C in fig. 51). Ciascuno di essi può essere alimentato indipendentemente dagli altri, con una corrente variabile nel tempo in modo predisposto (il che si ottiene con opportuni dispositivi elettronici). Si può così, per successivi tentativi, correggere il campo magnetico particolarmente durante la parte iniziale del ciclo di accelerazione.

L'intensità del fascio ottenibile da un sincrotrone è in gran parte determinata dalla precisione con cui è realizzato il suo campo magnetico.

CAPITOLO VI

SINCROTRONI A GRADIENTE ALTERNATO

§ VI-1. Considerazioni introduttive

Il sincrotrone a gradiente alternato (detto anche a foccheggiamento forte) è stato proposto nel 1950 da N. Christofilos in un rapporto stampato privatamente: indipendentemente da questo nel 1952 Courant, Livingston e Snyder ritrovarono il principio e lo pubblicarono^(*). In tale macchina, con l'artificio che spiegheremo, le ampiezze delle oscillazioni sia di betatrone che di sincrotrone sono notevolmente ridotte, il che consente di dare alla ciambella una sezione assai più ristretta e quindi di ridurre le dimensioni ed il costo del magnete.

Per comprendere il principio di funzionamento di questa macchina consideriamo, per fissare le idee, le oscillazioni di betatrone nel piano verticale. Se indichiamo con s l'ascissa lungo l'orbita imperturbata, l'elongazione verticale sarà data da (cfr. fig. 52 ove è rappresentata l'orbita rettificata)

$$z(s) = z_{\max} \text{sen}(s/\lambda) \quad (\text{VI.1.1})$$

ove $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{vT}{2\pi}$

e per la (IV.4.2)

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{n}} \quad (\text{VI.1.2})$$

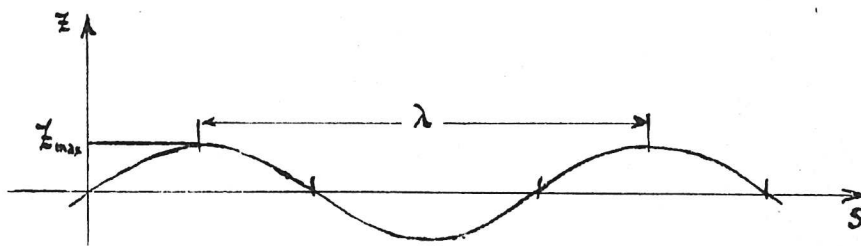


Fig. 52

(*) - COURANT, LIVINGSTON e SNYDER, The Strong-Focusing Synchrotron - A New High Energy Accelerator - Phys.Rev. 88, 1190 (1952).

D'altra parte è

$$z'(0) = z_{\max} / \chi \quad (\text{VI.1.3})$$

e quindi per la (VI.1.2)

$$z_{\max} = z'(0) R / \sqrt{n} \quad (\text{VI.1.4})$$

Ora $z'(0)$ è fissata dalle condizioni di iniezione o da una qualsiasi causa perturbatrice (come l'urto contro una molecola del gas) che defletta la particella dall'orbita imperturbata. Quindi, per ridurre l'ampiezza z_{\max} delle oscillazioni, si dovrebbe fare n molto grande. In modo del tutto analogo si trova per le oscillazioni radiali che

$$x_{\max} = x'(0) R / \sqrt{1-n} \quad (\text{VI.1.5})$$

e, per ridurre l'ampiezza di queste, si richiederebbe n negativo (*) e grande in modulo.

Le due esigenze non possono essere soddisfatte contemporaneamente: se si fa $n \gg 1$ si diminuisce l'ampiezza delle oscillazioni verticali ma si perde la stabilità radiale; se si fa $n \ll -1$ si diminuisce l'ampiezza delle oscillazioni orizzontali ma si perde la stabilità verticale (cfr. § IV-3.).

L'idea su cui è fondato il foccheggiamento forte è di soddisfare le due esigenze non contemporaneamente ma alternativa mente. Il magnete è costituito (nel caso più semplice) da tanti settori in cui si ha alternativamente un valore $n_1 \gg 1$ ed un valore $n_2 \ll -1$ (generalmente $n_2 = -n_1$). In questo modo la particella è soggetta alternativamente ad una azione focalizzante ed a una azione defocalizzante sia in senso verticale che in senso radia le. Queste azioni sono molto energiche e si susseguono con grande rapidità.

(*) Per la (V.1.1) n negativo corrisponde ad un campo crescente con r anzichè decrescente.

Si trova, come dimostreremo, che l'effetto globale è focalizzante e che l'ampiezza massima dello scostamento dall'orbita di equilibrio è minore che nel caso in cui n è costante e compreso tra 0 e 1. (I sincrotroni di quest'ultimo tipo sono detti appunto a gradiente costante o a foccheggiamento debole).

Questo si può comprendere anche intuitivamente osservando che nei settori foccheggianti la particella è soggetta ad una forza di richiamo proporzionale alla distanza dall'orbita di equilibrio, e nei settori defoccheggianti ad una forza repulsiva ancora proporzionale alla distanza dall'orbita. Poichè l'azione foccheggianta si esercita in media quando la particella è più distante dall'orbita di equilibrio, la forza di richiamo risulta in media più efficace. Per illustrare questo ragionamento qualitativo si consideri la fig. 53 ove è rappresentato lo scostamento verticale $z(s)$ in un sincrotrone a gradiente alternato (G.A).

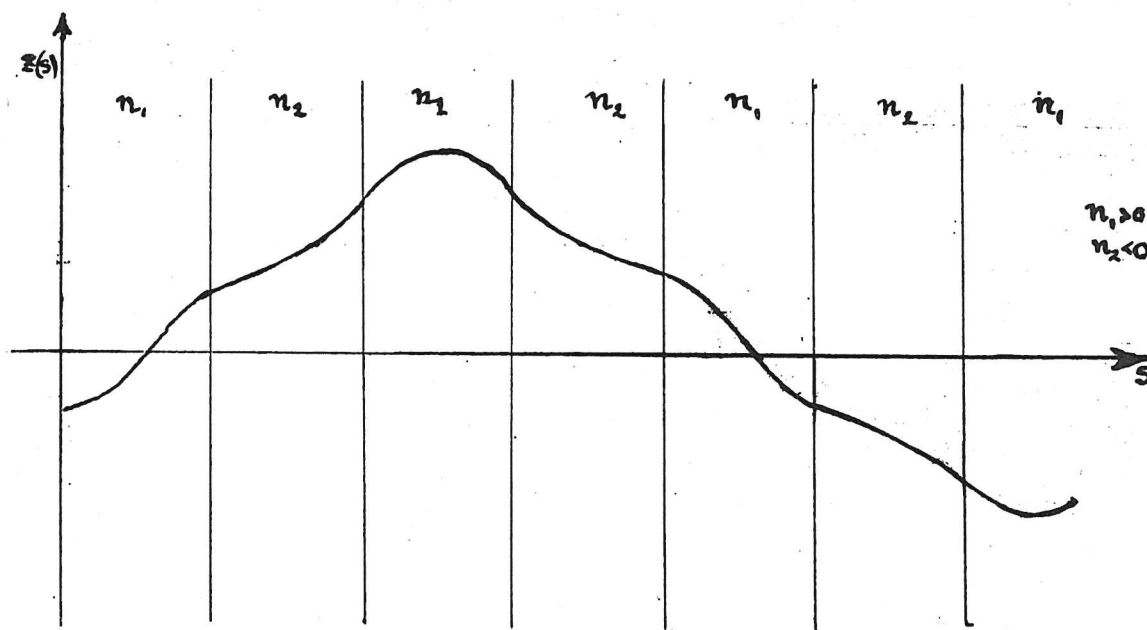


Fig. 53

(Si noti che nei settori in cui $n=n_1$, $z(s)$ è sinusoidale, e nei settori in cui $n=n_2$, $z(s)$ è un arco di catenaria, come segue dall'equazione (IV.3.29)).

Si possono realizzare sincrotroni a G.A. di forma più generale, in cui, anzichè alternarsi due tipi di settore con indici n_1, n_2 , si alternano con una legge periodica opportuna più tipi di settore con indici del campo diversi. Tra questi sono spesso compresi settori aventi $n=0$ (cioè B_z uniforme: "campo guida") e tratti rettilinei con $B_z=0$. Da questo punto di vista si comprende come il race-track, pur essendo un sincrotrone a foccheggiamento debole, si possa trattare con il formalismo che ricaveremo per i sincrotroni a G.A..

L'intera macchina può generalmente scomporsi in un certo numero di parti, nelle quali i vari tipi di settore si succedono nello stesso ordine: ognuna di queste parti (non ulteriormente divisibile in parti uguali) è detta un elemento periodico della macchina.

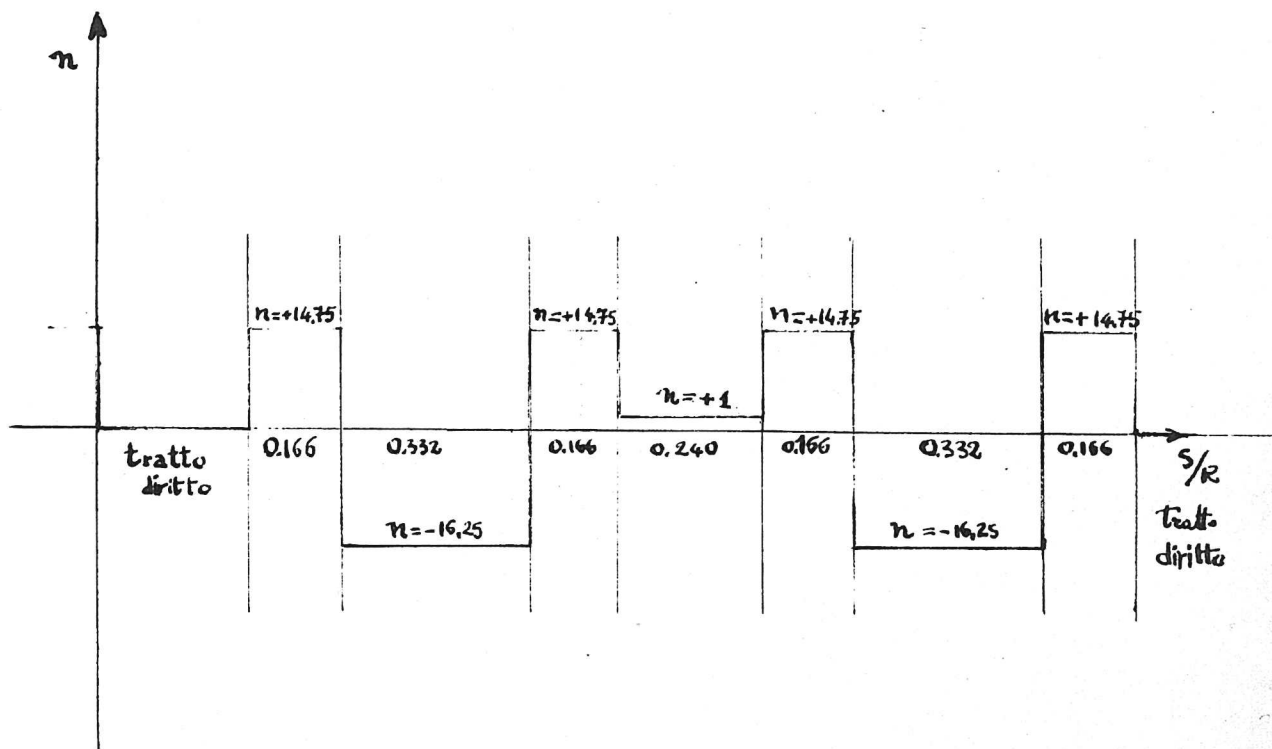


Fig. 54

Come esempio riportiamo in fig. 54 il grafico dello andamento di n , in funzione della distanza sull'orbita misurata in radianti, in un elemento periodico (quadrante) del sincrotrone per elettroni da 1,5 GeV dell'Università di Cornell (che descriveremo più in dettaglio nel § VI-10). Aggiungeremo qui soltanto che i tratti diritti sono lunghi 91 cm, il raggio dei quadranti è di 3,81 m, ed il rapporto tra la lunghezza di un quadrante e di un tratto diritto è $\simeq 6,5$.

In un sincrotrone a G.A. nel caso in cui vi siano settori con valori di n uguali ed opposti, essi possono essere realizzati con magneti identici (identico profilo dei poli) con il C rivotto rispettivamente all'interno o all'esterno della macchina.

§ VI-2. Cenno sull'algebra delle matrici

Un formalismo particolarmente adatto per lo studio delle oscillazioni nei sincrotroni a G.A. è quello che fa uso dell'algebra delle matrici, di cui ora diamo qualche elemento ^(*).

Una matrice quadrata di ordine n è costituita da n^2 numeri (reali o complessi) detti elementi della matrice, disposti in una tabella di n righe ed n colonne. Una matrice sarà indicata con una lettera maiuscola:

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.2.1})$$

Indichiamo con a_{ik} l'elemento comune alla riga i ed alla colonna k . Si dice matrice nulla (indicata con $[0]$) la matrice i cui elementi sono tutti nulli ($a_{ik} = 0$), e matrice unitaria (indicata con $[1]$) la matrice i cui elementi sono tutti nulli tranne quelli sulla diagonale principale che valgono 1 ($a_{ik} = \delta_{ik}$, ove δ_{ik} è il noto simbolo di Kronecker).

Date due matrici A , B (i cui elementi saranno indicati con a_{ik} , b_{ik}), si definisce la loro somma $A+B$ come la matrice i cui elementi sono

$$(A+B)_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (\text{VI.2.2})$$

Dato un numero m si definisce il prodotto mA di m per la matrice A come la matrice i cui elementi sono quelli di A moltiplicati per m , cioè

$$(mA)_{ik} = ma_{ik} \quad (\text{VI.2.3})$$

(*) Per una trattazione più dettagliata v. DENIS-PAPIN e KAUFMANN, Cours de calcul matriciel appliqué, Ed. Albin Michel - Paris (1951)

Date due matrici A e B si definisce il loro prodotto AB che è una nuova matrice i cui elementi sono dati da

$$(AB)_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \quad (\text{VI.2.4})$$

(prodotto "righe per colonne"). In generale $AB \neq BA$ e si può avere $AB = 0$ con $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Ad una matrice quadrata A si può collegare un numero, che si chiama il suo "determinante" e si indica con $\det A$: esso è definito dalla nota regola algebrica di calcolo dei determinanti. Notare che

$$\det AB = \det A \cdot \det B \quad (\text{VI.2.5})$$

Un'altra grandezza che interessa è la somma degli elementi diagonali $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ che sarà detta "traccia" (o "spur") della matrice A e indicata con $\text{tr } A$.

Sarà utile anche considerare dei vettori nello spazio a n dimensioni. Le componenti di un vettore \vec{u} saranno indicate con u_i ($i=1, 2, \dots, n$). Tali vettori potranno essere considerati come matrici a n righe ed una colonna, aventi per elementi le componenti:

$$\vec{u} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (\text{VI.2.6})$$

Si può definire il prodotto di una matrice per un vettore, $A\vec{u}$, che è ancora un vettore che si ottiene dalla regola di moltiplicazione delle matrici (VI.2.4), cioè

$$(A\vec{u})_i = \sum_r a_{ir} u_r \quad (\text{VI.2.7})$$

Questa costituisce una equazione di grado n in λ ed è detta equazione caratteristica della matrice A . Essa ammetterà n radici λ_i (non necessariamente distinte)^(★) ad ognuna delle quali corrisponderà un autovettore $\vec{u}^{(i)} \equiv (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$.

Gli n autovettori così determinati costituiscono un "sistema completo": questo significa che ogni vettore \vec{w} è esprimibile come una opportuna combinazione lineare degli $\vec{u}^{(i)}$

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^n a_j \vec{u}^{(j)} \quad (\text{VI.2.12})$$

Quindi se una matrice M è tale che

$$M \vec{u}^{(j)} = 0 \text{ per ogni } j \quad (\text{VI.2.13})$$

sarà necessariamente $M \vec{w} = 0$ per ogni \vec{w} e quindi

$$M = [0] \quad (\text{VI.2.14})$$

Esplicitando l'equazione caratteristica (VI.2.11) si ha

$$\lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 \quad (\text{VI.2.15})$$

dove i coefficienti c_h sono somme di prodotti delle a_{ik} : in particolare

$$c_{n-1} = - \text{tr } A; \quad c_0 = (-1)^n \det A \quad (\text{VI.2.16})$$

Da noti teoremi sulle equazioni algebriche risultano quindi le seguenti proprietà degli autovalori di una matrice

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr } A \quad (\text{VI.2.17})$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A \quad (\text{VI.2.18})$$

Nel caso (che ci interesserà) di matrici di rango 2 queste formu

(★) Notiamo che, nel caso in cui alcuni dei λ_i coincidano, essi sono autovalori degeneri. Per semplicità escludiamo nella nostra trattazione questo caso, che porterebbe in definitiva alle stesse conclusioni trovate supponendo tutte le λ_i diverse.

le permettono di scrivere direttamente l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0 \quad (\text{VI.2.19})$$

Notiamo infine che, se nell'equazione (VI.2.15) si sostituisce a λ la matrice A , l'uguaglianza è ancora verificata; cioè si ha

$$A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 [1] = [0] \quad (\text{VI.2.20})$$

Per dimostrare questa relazione basta, per quanto si è detto, far vedere che la matrice a primo membro, applicata ad ognuno degli autovettori di A , $\vec{u}^{(j)}$, da zero. Questo segue immediatamente dalla (VI.2.9) e dal fatto che tutti i λ_j soddisfano la (VI.2.15).

§ VI-3. Oscillazioni di betatrone in un sincrotrone a G.A.:
matrici caratteristiche.

Trattiamo il caso delle oscillazioni verticali (per passare a quelle radiali basterà sostituire n con $(1 - n)$) e consideriamo dapprima il moto della particella in un dato settore. Se $n > 0$ lo scostamento verticale sarà espresso da

$$Z = z_0 \cos \frac{s}{\chi} + \chi z'_0 \operatorname{sen} \frac{s}{\chi} \quad (\text{VI.3.1})$$

in cui $z_0 = z(0)$ e $z'_0 = z'(0)$ (prendendo $s=0$ all'entrata del settore), e χ è dato dalla (VI.1.2).

Se $n < 0$ vale ancora la (VI.3.1), ma in questo caso χ è immaginario. Poniamo

$$\chi = i \chi' \quad (\text{VI.3.2})$$

(in modo che χ' risulti reale) e ricordiamo le identità

$$\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x ; \quad \operatorname{cos}(ix) = \operatorname{cosh} x \quad (\text{VI.3.3})$$

Allora la (VI.3.1) si può scrivere

$$Z = z_0 \operatorname{cosh} \frac{s}{\chi'} + \chi' z'_0 \operatorname{senh} \frac{s}{\chi'} \quad (\text{VI.3.4})$$

Nei tratti con solo campo guida ($n=0$) o rettilinei non c'è forza di richiamo e vale la ^(*)

$$z = z_0 + z'_0 s \quad (\text{VI.3.5})$$

L'intera traiettoria è costituita da tratti di curva di questi tre tipi. Per la continuità di z , z' , lungo la traiettoria i loro valori z_0 , z'_0 all'entrata di ogni settore devono essere uguali ai valori di z , z' all'uscita del settore precedente. Questi si ottengono

(*) Notare che per le oscillazioni orizzontali i settori con $n=0$ non sono assimilabili ai tratti rettilinei: infatti in essi $\chi = R/\sqrt{1-n} = R$, e quindi essi sono focalizzanti. Sono invece assimilabili ai rettilinei i tratti con $n=1$.

dalla relativa equazione ((VI.3.1), (VI.3.4) oppure (VI.3.5)) ponendo al posto di s la lunghezza del settore in questione. Così, dati z_0, z'_0 per il primo settore, resta teoricamente determinata tutta la traiettoria.

Mostreremo ora come con l'algebra delle matrici si possa facilmente, dati z_0, z'_0 all'ingresso del primo settore, determinare z e z' dopo un numero qualsiasi di settori.

Consideriamo insieme all'espressione della z (VI.3.1) quella della sua derivata moltiplicata per una costante arbitraria k (avente le dimensioni di una lunghezza^(*)), cioè

$$\begin{aligned} z &= z_0 \cos \frac{s}{\lambda} + \lambda z'_0 \sin \frac{s}{\lambda} \\ kz' &= -\frac{k}{\lambda} z_0 \sin \frac{s}{\lambda} + kz'_0 \cos \frac{s}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.6})$$

Queste due grandezze possono essere considerate come le due componenti (in uno spazio rappresentativo) di un vettore

$$\vec{u}(s) = \begin{bmatrix} z \\ kz' \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.7})$$

il quale pertanto caratterizza lo "stato" della particella (posizione ed inclinazione) all'ascissa s .

Vediamo quale relazione c'è tra la \vec{u} all'entrata ed all'uscita di un settore di lunghezza l . Preso $s=0$ all'entrata, e posto $\vec{u}_0 = \vec{u}(0), \vec{u}_1 = \vec{u}(l)$, sarà

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ kz'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \cos l/\lambda + \lambda z'_0 \sin l/\lambda \\ -\frac{k}{\lambda} z_0 \sin l/\lambda + kz'_0 \cos l/\lambda \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.8})$$

Definendo una matrice Γ_1 (caratteristica del settore considerato) per mezzo della

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{\lambda}{k} \sin \theta \\ -\frac{k}{\lambda} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.9})$$

(*) Questa costante è introdotta per comodità, in quanto, scegliendola convenientemente, molte formule si semplificano. (Per es. nel § VI-6 converrà prendere $k = \lambda$).

ove

$$\Theta = e/\lambda \quad (\text{VI.3.10})$$

la (VI.3.8) si scrive

$$\vec{u}_1 = \Gamma_1 \vec{u}_0 \quad (\text{VI.3.11})$$

In questo modo, note le condizioni iniziali per un settore, espresse da \vec{u}_0 , si ottengono le condizioni iniziali per il settore successivo, espresse da \vec{u}_1 .

Si noti che queste formule valgono non solo per un settore focalizzante (cioè con λ reale), ma anche per uno defocalizzante: in questo caso converrà esplicitare gli immaginari mediante (VI.3.2), (VI.3.3). Si ottiene così, usando la (VI.3.4) e la sua derivata, la matrice Γ_1' relativa ad un settore di lunghezza l , con indice $n < 0$:

$$\Gamma_1' = \begin{bmatrix} \cosh \Theta' & \frac{\lambda'}{k} \sinh \Theta' \\ \frac{k}{\lambda'} \sinh \Theta' & \cosh \Theta' \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.12})$$

ove

$$\Theta' = e/\lambda' \quad (\text{VI.3.13})$$

Per un tratto diritto (o con campo guida) di lunghezza L si ha similmente una matrice

$$\Gamma_1'' = \begin{bmatrix} 1 & L/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.14})$$

La Γ relativa ad un settore si dice matrice caratteristica del settore stesso. Notiamo che tutte le Γ sono matrici di rango 2 che hanno determinante uguale a 1.

Applicando la (VI.3.11) al settore successivo, di matrice caratteristica Γ_2 , si ha

$$\vec{u}_2 = \Gamma_2 \vec{u}_1 \quad (\text{VI.3.15})$$

ove \vec{u}_2 è riferito all'uscita del secondo settore.

Sostituendo la (VI.3.11) nella (VI.3.15) segue

$$\vec{u}_2 = \Gamma_2 \Gamma_1 \vec{u}_0 \quad (\text{VI.3.16})$$

Analogamente, detta \vec{u}_n la \vec{u} all'uscita dell'n-esimo settore, si ha

$$\vec{u}_n = \Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_2 \Gamma_1 \vec{u}_0 \quad (\text{VI.3.17})$$

ove Γ_i ($i=1,2,\dots,n$) è la matrice caratteristica dell'i-esimo settore. In particolare, se si considerano gli n settori costituenti un elemento periodico, conviene definire la matrice Δ (matrice caratteristica dell'intero elemento periodico) mediante ^(*)

$$\Delta = \Gamma_n \Gamma_{n-1} \dots \Gamma_2 \Gamma_1 \quad (\text{VI.3.18})$$

Poichè tutte le Γ_i hanno determinante uguale a 1, con un'ovvia estensione della (VI.2.5) si trova

$$\det \Delta = 1 \quad (\text{VI.3.19})$$

Detta $\vec{u}_{(m)}$ la \vec{u} dopo che la particella ha attraversato m elementi periodici, si ha

$$\vec{u}_{(m)} = \Delta^m \vec{u}_0 \quad (\text{VI.3.20})$$

(*) Poichè la macchina ha struttura periodica chiusa, l'inizio dell'elemento periodico è naturalmente arbitrario (non è nemmeno necessario che coincida con l'inizio di un settore). Cambiando l'inizio dell'elemento periodico cambierà la forma della matrice Δ ; ma tutte le conclusioni di interesse fisico che verranno raggiunte resteranno inalterate.

§ VI-4. Condizioni di stabilità delle oscillazioni di betatrone

Perchè la traiettoria sia "stabile" bisogna che $|\vec{u}_{(m)}|$ resti limitato anche quando m cresce indefinitivamente. Satisfacendo questa esigenza troveremo le condizioni di stabilità^(*) per il sincrotrone a G.A..

Se indichiamo con λ_1, λ_2 gli autovalori di Δ e con \vec{v}_1, \vec{v}_2 i rispettivi autovettori, per la proprietà espressa dalla (VI.2.12) potremo porre \vec{u}_0 sotto la forma

$$\vec{u}_0 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \quad (\text{VI.4.1})$$

dove α_1, α_2 sono due opportuni coefficienti.

Avremo quindi

$$\vec{u}_{(m)} = \alpha_1 \Delta^m \vec{v}_1 + \alpha_2 \Delta^m \vec{v}_2 \quad (\text{VI.4.2})$$

e per la (VI.2.9)

$$\vec{u}_{(m)} = \alpha_1 \lambda_1^m \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^m \vec{v}_2 \quad (\text{VI.4.3})$$

Notiamo che, se uno dei due autovalori di Δ è reale e maggiore di 1, la sua potenza m -esima cresce indefinitamente con m , e si ha instabilità. Cerchiamo la condizione per cui ciò non accada.

Poichè Δ è una matrice di rango 2 ed a determinante unitario, la sua equazione caratteristica è (cfr. (VI.2.19))

$$\lambda^2 - \text{tr} \Delta \lambda + 1 = 0 \quad (\text{VI.4.4})$$

Ne segue che $\lambda_1 \lambda_2 = 1$; quindi, se le radici della (VI.4.4) sono reali, una delle due è necessariamente maggiore di 1^(**), e per quanto già detto in questo caso non si ha stabilità. Occorre quindi che le radici siano complesse coniugate: questo implica che il

(*) La stabilità non è qui intesa nel senso abituale, in quanto non si richiede che l'orbita perturbata tenda a ritornare sempre all'orbita imperturbata, ma si richiede soltanto che gli scostamenti dall'orbita imperturbata si mantengano limitati.

(**) Non consideriamo il caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ che rappresenta un caso limite di stabilità. in pratica non realizzabile.

discriminante della (VI.4.4) sia negativo, cioè

$$|\operatorname{tr} \Delta| < 2 \quad (\text{VI.4.5})$$

(condizione di stabilità).

Se questa condizione è verificata i due autovalori λ_1, λ_2 , complessi coniugati, si possono scrivere sotto la forma

$$\lambda_1 = e^{i\varphi} \quad ; \quad \lambda_2 = e^{-i\varphi} \quad (\text{VI.4.6})$$

con φ reale, e si ha

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Delta = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) = \cos \varphi \quad (\text{VI.4.7})$$

§ VI-5. Calcolo di z e z' dopo un numero qualsiasi di elementi periodici

Calcoliamo ora z e z' (cioè \vec{u}) dopo un numero generico m di elementi periodici. Poichè ci serviremo della (VI.3.20), stabiliremo ora una formula che permette di calcolare facilmente qualsiasi potenza della matrice Δ . A tale scopo osserviamo che, essendo $\sin \varphi \neq 0$ (cfr. nota al § precedente), si può sempre definire una matrice J tale che

$$\Delta = [1] \cos \varphi + J \sin \varphi \quad (\text{VI.5.1})$$

Basta infatti prendere

$$J = \frac{\Delta - [1] \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (\text{VI.5.2})$$

Calcoliamo ora J^2 . Si ha

$$J^2 = \sin^{-2} \varphi \{ \Delta^2 - 2\Delta \cos \varphi + [1] \cos^2 \varphi \} = \sin^{-2} \varphi \{ \Delta^2 - 2\cos \varphi \Delta + [1] - [1] \sin^2 \varphi \} \quad (\text{VI.5.3})$$

I primi tre termini in parentesi graffa danno zero per la proprietà espressa dalla (VI.2.20), cioè che una matrice soddisfa la sua equazione caratteristica. Quindi si ha

$$J^2 = - [1] \quad (\text{VI.5.4})$$

La J (pur essendo una matrice reale) si presenta dunque come l'analogo dell'unità immaginaria nell'ordinaria notazione dei numeri complessi. Formalmente quindi potremo utilizzare le formule dell'algebra dei numeri complessi; ed in particolare la formula di De Moivre per la potenza m -esima di un numero complesso, il cui analogo nel nostro caso è

$$\Delta^m = [1] \cos m\varphi + J \operatorname{sen} m\varphi \quad (\text{VI.5.5})$$

Si ha quindi da (VI.3.20)

$$\vec{u}_{(m)} = \vec{u}_0 \cos m\varphi + J \vec{u}_0 \operatorname{sen} m\varphi \quad (\text{VI.5.6})$$

§ VI-6. Applicazione al caso del race-track

Come già detto nel § V-7, l'algebra delle matrici si può applicare al caso del race-track, benchè esso non sia un sincrotrone a foccheggiamento forte. Ci riferiremo in particolare allo schema di costruzione indicato in fig. 7 (cap. I). In questo caso l'elemento periodico è costituito dalla successione di un settore curvo (con $0 < n < 1$) di lunghezza ℓ , e di un tratto rettilineo di lunghezza L .

La matrice Γ_1 per il settore curvo sarà data dalla (VI.3.9)

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.1})$$

ove si è posto $k = \lambda$ e, come già detto (v. (VI.3.10)),

$$\theta = \ell/\lambda \quad (\text{VI.6.2})$$

Ricordiamo che λ (cfr. § VI-1) è dato da

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{n}} \quad \text{per le oscillazioni verticali}$$

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{1-n}} \quad \text{per le oscillazioni orizzontali}$$

e quindi, se il race-track ha N settori (generalmente $N = 4$) sarà

$$\theta = \frac{2\pi}{N} \sqrt{n} \quad \text{per le oscillazioni verticali} \quad (\text{VI.6.3})$$

$$\theta = \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n} \quad \text{per le oscillazioni orizzontali}$$

Si noti che, per $0 < n < 1$, è sempre $\theta < \pi$.

La matrice Γ_2^1 relativa al tratto rettilineo è data dalla (VI.3.14) ed è (sempre con $k = \lambda$)

$$\Gamma_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & L/\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.4})$$

In questo caso $\Delta = \Gamma_2^1 \Gamma_1$ ed eseguendo il prodotto si ottiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \theta - a \sin \theta & \sin \theta + a \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (\text{VI.6.5})$$

ove si è posto

$$a = L/\lambda \quad (\text{VI.6.6})$$

La condizione di stabilità (VI.4.5) risulta quindi espressa da

$$|2 \cos \theta - a \sin \theta| < 2 \quad (\text{VI.6.7})$$

ossia

$$-1 < \cos \theta - \frac{1}{2} a \sin \theta < 1 \quad (\text{VI.6.8})$$

La prima condizione conduce alla seguente disuguaglianza (essendo $\sin \theta > 0$)

$$\frac{a}{2} < \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \cotg \frac{\theta}{2} \quad (\text{VI.6.9})$$

cioè per le (VI.6.2), (VI.6.3), (VI.6.6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{2R} \sqrt{n} &< \cotg \left(\frac{\pi}{N} \sqrt{n} \right) \\ \frac{L}{2R} \sqrt{1-n} &< \cotg \left(\frac{\pi}{N} \sqrt{1-n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.6.10})$$

La seconda condizione è sempre soddisfatta per $\sin \theta > 0$.

Le (VI.6.10) danno una limitazione per L che però non è molto stringente. Infatti per $n = 0,6$, per esempio, si ha per un sincrotrone a quattro settori

$$L/R < 3,7 \quad \text{per la stabilità delle oscillazioni verticali}$$

$$L/R < 5,8 \quad \text{per la stabilità delle oscillazioni orizzontali.}$$

Generalmente i tratti diritti sono lunghi circa un terzo o un quarto dei tratti curvi.

Poichè i tratti diritti sono relativamente corti rispetto ai tratti curvi, l'andamento delle oscillazioni, sia verticali che orizzontali (a tratto pieno in fig. 55) può essere approssimato da una sinusoida (tratteggiata in figura). Questa può essere scelta, per esempio, in modo tale da coincidere con lo scostamento effettivo all'inizio di ogni elemento periodico. Cerchiamo ora la lunghezza d'onda λ^* e l'ampiezza A di tale sinusoida.

Lo scostamento z_m all'uscita dell'm-esimo elemento periodico è dato dalla prima componente del vettore $\vec{u}_{(m)} = \Delta^m \vec{u}_0$ (cfr. (VI.3.20)). Per trovare Δ^m secondo la (VI.5.5) ricaviamo prima l'espressione di J dalla (VI.5.2). Ricordando la (VI.4.7) e la (VI.6.5) si ottiene

$$J = \frac{1}{\sin \varphi} \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \sin \theta & \sin \theta + a \cos \theta \\ -\sin \theta & \frac{a}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.11})$$

e quindi

$$\Delta^m = \begin{bmatrix} \cos m\varphi - \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \frac{a}{2} \sin \theta & \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} (\sin \theta + a \cos \theta) \\ -\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \sin \theta & \cos m\varphi + \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \frac{a}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.12})$$

Quindi z_m (che è la prima componente di $\vec{u}_{(m)}$) è dato da

$$z_m = z_0 \cos m\varphi + \left[-z_0 \frac{a}{2} \sin \theta + \chi z'_0 (\sin \theta + a \cos \theta) \right] \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \quad (\text{VI.6.13})$$

cioè è della forma

$$z_m = p \cos m\varphi + q \sin m\varphi = A \sin(m\varphi + b) \quad (\text{VI.6.14})$$

ove le costanti p, q oppure A, b sono determinabili dalla (VI.6.13).

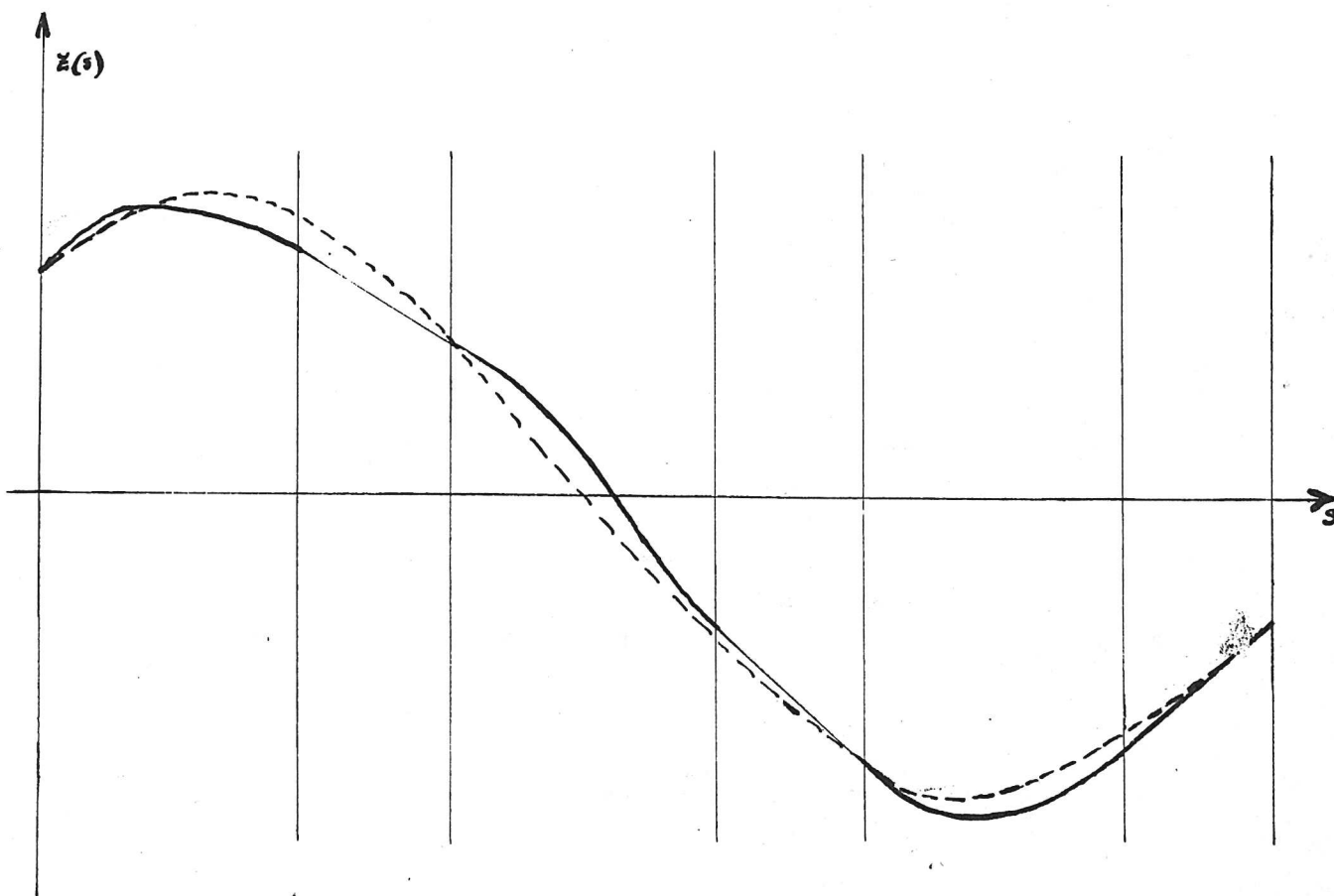


Fig. 55

D'altra parte la sinusoide approssimante deve avere la forma

$$z^* = A' \sin\left(\frac{s}{\lambda^*} + b'\right) \quad (\text{VI.6.15})$$

e la z^* calcolata all'uscita degli elementi periodici ($s=m(\ell+L)$) deve essere uguale alla z_m corrispondente. Questo si può ottenere prendendo: $A' = A$, $b' = b$ e

$$\lambda^* = \frac{\ell+L}{\varphi} \quad (\text{VI.6.16})$$

Nel caso in cui a sia piccolo, cioè (cfr. (VI.6.6)) $L \ll \lambda = \frac{R}{\sqrt{n}}$, essendo $\cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \Delta = \cos \theta - \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta$ (cfr. (VI.6.5)), si ha

$$\cos \varphi \simeq \cos \left(\theta + \frac{a}{2} \right) \quad (\text{VI.6.17})$$

e quindi

$$\varphi \simeq \theta + \frac{a}{2} = \frac{\ell + \frac{1}{2} L}{\lambda} \quad (\text{VI.6.18})$$

e dalla (VI.6.16) segue

$$\lambda^* = \frac{\ell + L}{\ell + \frac{1}{2} L} \lambda \quad (\text{VI.6.19})$$

Corrispondentemente la pulsazione delle oscillazioni verticali non sarà più $\omega_z = \omega \sqrt{n}$, ma

$$\omega_z^* = \omega_z / \alpha \quad (\text{VI.6.20})$$

ove $\alpha = \frac{\ell + L}{\ell + \frac{1}{2} L} = \frac{1 + L/\ell}{1 + L/2\ell}$.

Analogamente per le oscillazioni radiali si sarebbe trovato

$$\omega_r^* = \omega_r / \alpha \quad (\text{VI.6.21})$$

Notiamo che, come era da aspettarsi, la lunghezza d'onda della sinusoide approssimante è maggiore di quella che si avrebbe se non vi fossero i tratti dritti. Tuttavia il rapporto λ^*/λ è minore del fattore

$$\Lambda = 1 + \frac{L}{\ell} \quad (\text{VI.6.22})$$

di cui si allunga il percorso della particella, e che determina la frequenza effettiva di rotazione ω^*

$$\omega^* = \frac{\omega}{\Lambda} = \frac{v}{\Lambda R} \quad (\text{VI.6.23})$$

minore di $\omega = v/r$.

Si trova inoltre che per un race-track a quattro elementi periodici con $n=0,6$ il rapporto A/A_0 , dell'ampiezza della sinusoide approssimante all'ampiezza della sinusoide corrispondente se non vi fossero i tratti dritti è maggiore di 1 e precisa-

mente

$$\frac{A}{A_0} = 1 + 0,29 \frac{L}{R} \quad \text{per le oscillazioni verticali}$$

$$\frac{A}{A_0} = 1 + 0,41 \frac{L}{R} \quad \text{per le oscillazioni orizzontali,}$$

per $z_0=0$.

Per quello che riguarda le oscillazioni di fase in un sincrotrone a race-track si possono ripetere le considerazioni già svolte nei §§ V-3,4,5, tenendo conto che in questo caso la frequenza di rotazione delle particelle è data dalla (VI.6.23). Si trova così che la grandezza K definita dalla (V.3.21) va sostituita con K^* dato da

$$K^* = 1 + \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{\Lambda(1-n)} - 1 \right\} \quad (\text{VI.6.24})$$

Poichè Λ è poco diverso da 1, in pratica è anche in questo caso $K^* > 1$.

Con questa sostituzione restano valide tutte le considerazioni svolte nel capitolo precedente sulle oscillazioni di fase e di sincrotrone.

Per quanto riguarda le risonanze vale ciò che si è detto in generale nel § V-7, purchè si considerino, tanto per il moto orbitale quanto per le oscillazioni radiali e verticali, le frequenze effettive di rotazione date dalle (VI.6.20), (VI.6.21) e (VI.6.23). Con ciò le (V.8.1), (V.8.2) si modificano rispettivamente in

$$p\omega^* + q\omega_z^* + r\omega_r^* = 0 \quad (\text{VI.6.25})$$

e

$$\frac{p}{\Lambda/\alpha} + q\sqrt{n} + r\sqrt{1-n} = 0 \quad (\text{VI.6.26})$$

Poichè $\Lambda/\alpha = 1 + \frac{1}{2} L/l$ differisce poco da 1, alcuni dei valori "proibiti" di n sono leggermente modificati. Tuttavia i valori dati dalla tabella (V.8.4) ($p=0$) restano inalterati.

§ VI-7. Un caso particolare di sincrotrone a G.A.. Il diagramma di stabilità

Applichiamo ora quanto ricavato nel § VI.3 al caso semplice di un sincrotrone a G.A. nel quale l'elemento periodico sia formato da due soli settori con indice del campo rispettivamente uguale a n_1, n_2 , entrambi di lunghezza l . Supponiamo $n_1 > 0, n_2 < 0$ ed anche $|n_1| > 1, |n_2| > 1$ e diciamo $N = 2\pi R/l$ il numero totale di settori.

Consideriamo dapprima le oscillazioni verticali. La matrice Γ_1 relativa al settore di indice n_1 sarà ancora una matrice del tipo (VI.3.9):

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \frac{\chi_1}{k} \sin \theta_1 \\ -\frac{k}{\chi_1} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.7.1})$$

in cui (cfr. (VI.6.3))

$$\chi_1 = \frac{R}{\sqrt{n_1}} \quad (\text{VI.7.2})$$

e (cfr. (VI.3.10))

$$\theta_1 = \frac{l}{\chi_1} = \frac{l}{R} \sqrt{n_1} = \frac{2\pi}{N} \sqrt{n_1} \quad (\text{VI.7.3})$$

La matrice Γ_2 relativa ai settori di indice n_2 sarà una matrice del tipo (VI.3.12):

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \cosh \theta'_2 & \frac{\chi'_2}{k} \operatorname{senh} \theta'_2 \\ \frac{k}{\chi'_2} \operatorname{senh} \theta'_2 & \cosh \theta'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.7.4})$$

in cui

$$\chi'_2 = \frac{R}{\sqrt{n'_2}} \quad (\text{VI.7.5})$$

(ove $n_2' = -n_2 > 0$) e (cfr. (VI.3.13))

$$\Theta_2' = \frac{\ell}{\lambda_2'} = \frac{\ell}{R} \sqrt{n_2'} = \frac{2\pi}{N} \sqrt{n_2'} \quad (\text{VI.7.6})$$

Eseguendo il prodotto $\Delta_v = \Gamma_2 \Gamma_1$ (l'indice "v" significa che ci si riferisce alle oscillazioni verticali) e scrivendone la traccia si trova

$$\text{tr} \Delta_v = 2 \cos \Theta_1 \cosh \Theta_2' + \text{sen} \Theta_1 \text{senh} \Theta_2' \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2'} - \frac{\lambda_2'}{\lambda_1} \right) \quad (\text{VI.7.7})$$

Poichè le λ sono inversamente proporzionali alle relative θ (cfr. (VI.7.3), (VI.7.6)) si ha anche

$$\text{tr} \Delta_v = 2 \cos \Theta_1 \cosh \Theta_2' + \text{sen} \Theta_1 \text{senh} \Theta_2' \left(\frac{\Theta_2'}{\Theta_1} - \frac{\Theta_1}{\Theta_2'} \right) = 2 \tau_v(\Theta_1, \Theta_2') \quad (\text{VI.7.8})$$

La funzione $\tau_v(\Theta_1, \Theta_2')$ definita dalla (VI.7.8), è una funzione universale di Θ_1, Θ_2' . La condizione di stabilità (VI.4.5) impone che tale funzione sia compresa tra -1 e +1. Se riportiamo (v. fig. 56) su un piano cartesiano $(\Theta_1^2, \Theta_2'^2)$ (*) la curva a di equazione $\tau_v = 1$ e la curva b di equazione $\tau_v = -1$, le coppie di valori di Θ_1, Θ_2' che soddisfano la condizione di stabilità corrispondono a punti giacenti nella zona compresa tra queste due curve.

Consideriamo ora le oscillazioni radiali. Analogamente a quanto fatto precedentemente dovremo calcolare la matrice Δ_r ed imporre la condizione $|\frac{1}{2} \text{tr} \Delta_r| = |\tau_r| < 1$. Data l'arbitrarietà dell'inizio dell'elemento periodico, conviene considerare ancora come primo settore quello focalizzante (cioè, nella nostra notazione, quello di indice n_2) e come secondo settore quello defocalizzante (indice n_1): $\Delta_r = \Gamma_1 \Gamma_2$.

Poichè si tratta ora di oscillazioni radiali, tutto quello che si è detto per le oscillazioni verticali si può ripetere pur di sostituire $1-n_2$ a n_1 e $1-n_1$ a n_2 , cioè $1+n_2'$ a n_1 .

(*) Sopra questo piano ogni macchina del tipo considerato in questo paragrafo è rappresentata da un punto.

e $-1+n_1$ a n_2' . La trasformazione descritta da questa sostituzione equivale, nel piano di fig. 56, ad una riflessione rispetto alla retta r che intercetta sugli assi due segmenti di lunghezza $\frac{4\pi^2}{N^2}$ (che in generale è piccola rispetto alla distanza OA).

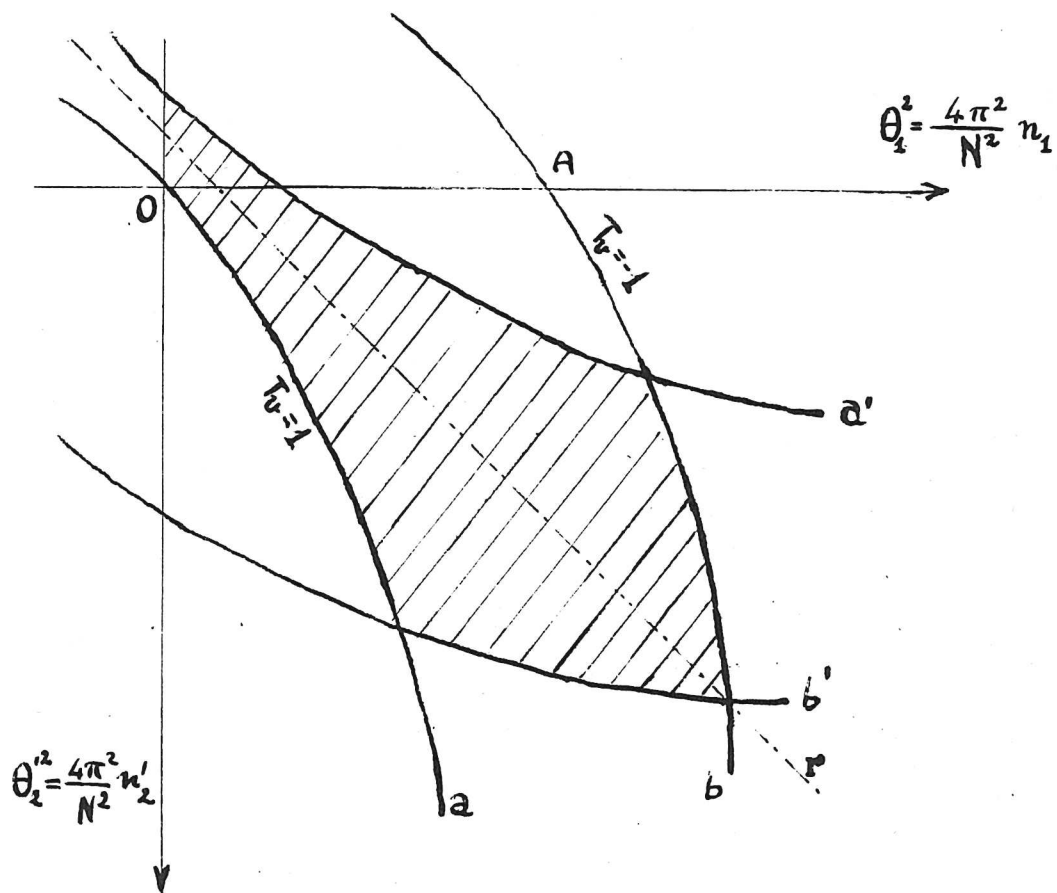


Fig. 56

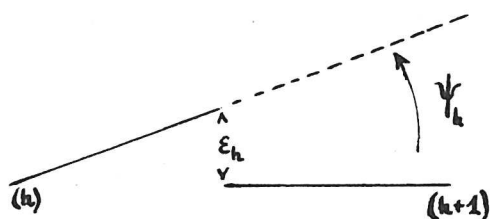
Con questa simmetria le curve a , b si trasformano rispettivamente nelle curve a' , b' , che sono appunto le curve di equazione $\tau_r = \pm 1$. I punti giacenti nella zona compresa tra a' e b' corrispondono a schemi di macchine che danno stabilità nelle oscillazioni radiali.

In definitiva si avrà stabilità sia per oscillazioni verticali che per oscillazioni radiali per tutti i punti nella zona tratteggiata di fig. 56, a forma di "cravatta".

A prescindere da altri effetti di cui parleremo nel prossimo paragrafo, conviene che il punto rappresentativo della macchina sia quanto più è possibile all'interno della zona di stabilità. Volendo porsi nel centro di essa si può richiedere la condizione $\tau_v = \tau_r = 0$, che per N sufficientemente grande equiva

§ VI-8. Errori di allineamento. Linee proibite

E' inevitabile che nella costruzione di un sincrotrone a G.A. i diversi settori non risultino perfettamente allineati. Definita in ciascun settore una "linea mediana" (arco di cerchio o retta nel piano equatoriale del settore), ove il campo magnetico ha il valore prescritto per l'orbita principale, gli errori di allineamento consisteranno nel fatto che i punti estremi delle linee mediane di due settori contigui non coincideranno, e le rispettive tangenti non saranno parallele. L'errore di allineamento tra l'h-esimo e l'(h+1)-esimo settore si potrà definire attraverso le quantità ε_h , ε'_h che rappresentano (v. fig. 57)



$$\varepsilon'_h = t_g \psi_h$$

Fig. 57

$$\vec{P}_h = \begin{bmatrix} \varepsilon_h \\ k\varepsilon'_h \end{bmatrix}$$

rispettivamente lo scostamento degli estremi delle due linee mediane e la tangente dell'angolo ψ_h tra le loro direzioni (*). Naturalmente ε e ε' saranno quantità piccole. Converrà anche qui introdurre un vettore

$$(VI.8.1)$$

Per studiare l'effetto degli errori di allineamento sul moto delle particelle, consideriamo un caso particolare semplice: il caso generale si può trattare in modo analogo e porta alle stesse conclusioni. Supponiamo dunque che l'errore di allineamento sia presente in un solo punto della macchina, cioè al passag-

(*) S'intende che si possono avere errori di allineamento in senso sia radiale che verticale, i quali vanno considerati separatamente. La trattazione che segue si può applicare indifferentemente ad uno qualsiasi dei due casi.

gio da un certo settore al successivo. Tale errore sia descritto da un vettore \vec{p} (del tipo (VI.8.1)). Facendo cominciare l'elemento periodico nel punto ove c'è l'errore di allineamento e chiamando Δ la sua matrice caratteristica, M il numero degli elementi periodici, dopo un giro si avrà (cfr. (VI.3.20))

$$\vec{u}_{(M)} = \Delta^M \vec{u}_0 + \vec{p} \quad (\text{VI.8.2})$$

dopo due giri

$$\vec{u}_{(2M)} = \Delta^M \vec{u}_{(M)} + \vec{p} = \Delta^{2M} \vec{u}_0 + (\Delta^M + [1])\vec{p} \quad (\text{VI.8.3})$$

Risulta evidente che dopo m giri la $\vec{u}_{(mM)}$ sarà data da un'espressione del tipo

$$\vec{u}_{(mM)} = \Delta^{mM} \vec{u}_0 + D^{(m)} \vec{p} \quad (\text{VI.8.4})$$

ove $D^{(m)}$ sarà una certa matrice facilmente ricavabile.

Anche se la condizione di stabilità (VI.4.5) è soddisfatta bisognerà ancora richiedere che il modulo del vettore $D^{(m)} \vec{p}$ si mantenga limitato al crescere di m . Sviluppando il calcolo si trova (detti $e^{\pm i\varphi}$ gli autovalori di Δ)

$$D^{(m)} \vec{p} = \frac{\text{sen} \frac{mM\varphi}{2}}{\text{sen} \frac{M\varphi}{2}} \vec{v} \quad (\text{VI.8.5})$$

ove \vec{v} è un vettore legato a \vec{p} e di modulo limitato (dell'ordine di grandezza del modulo di \vec{p}).

Se $\frac{1}{2}M\varphi \neq h\pi$ ($h=0,1,2,\dots$) il coefficiente della (VI.8.5) si mantiene limitato al crescere di m . Se invece

$$\varphi = h \frac{2\pi}{M} \quad (h=0,1,2,\dots) \quad (\text{VI.8.6})$$

tale coefficiente vale m e quindi il modulo di $D^{(m)} \vec{p}$ cresce proporzionalmente al numero dei giri. Anche un piccolo errore di allineamento porta alla fine le particelle ad urtare contro le pareti.

Ne segue quindi che il sincrotrone deve essere progettato in modo tale che φ non assuma i valori (VI.8.6). Essendo $\cos \varphi = \frac{1}{2} \text{tr} \Delta$ (cfr. (VI.4.7)), nel caso trattato nel § precedente le (VI.8.6) corrispondono (cfr. (VI.7.8)) ad una famiglia di $M+1$ curve nel piano di fig. 56 (di cui le due estreme sono quelle già tracciate). Poichè quanto si è detto si può riferire agli scostamenti sia verticali che radiali, vi saranno due famiglie di tali curve, corrispondenti a questi due casi. In definitiva in fig. 56 la zona di stabilità è solcata da una rete di "linee proibite" corrispondenti alle (VI.8.6), che sono rappresentate in fig. 58 (ove ci si riferisce ad un valore di N grande).

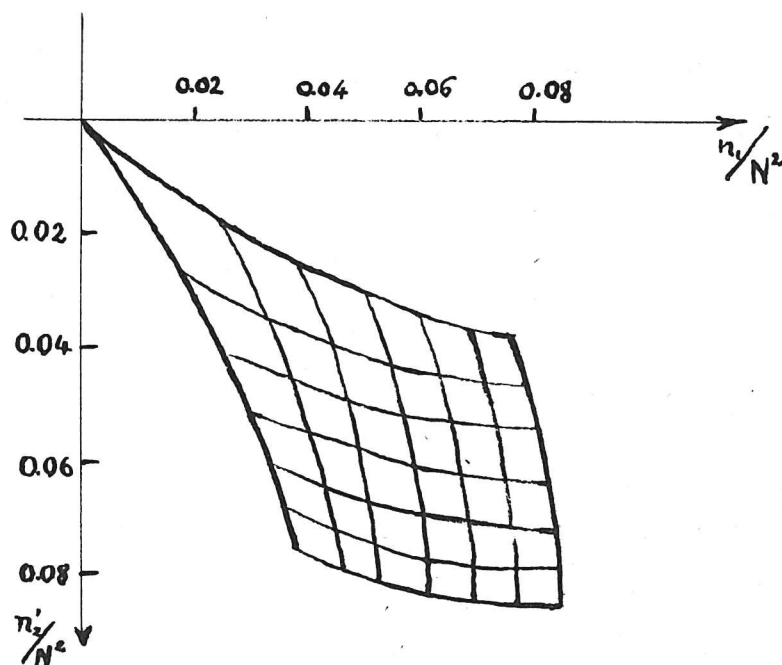


Fig. 58

La scelta del punto rappresentativo della macchina diviene allora più difficile: si deve cercare di scegliere tale punto quanto più è possibile al centro di una delle losanghe in cui è divisa la "cravatta" di fig. 58. Poichè le linee proibite si infittiscono al crescere di M , non sarà praticamente possibile far crescere il numero degli elementi periodici oltre un certo limite. Ne deriverà quindi una limitazione anche per l'indice del campo.

Altre linee proibite oltre a quelle introdotte dagli errori di allineamento si hanno in corrispondenza di quei valori di n_1, n_2 che danno luogo ad effetti di risonanza tra la frequenza delle oscillazioni radiali e verticali e tra esse e la frequenza di rotazione, del tipo di quelli descritti nel § V-7. In definitiva la considerazione di queste linee proibite limita ulteriormente la scelta del punto rappresentativo.

§ VI-9. Oscillazioni di fase in un sincrotrone a G.A. Energia di transizione

Per le macchine a gradiente costante abbiamo visto che le oscillazioni di fase hanno una pulsazione data da (cfr. (V.6.6))

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{|q|UKk}{2\pi E_s}} \cos \varphi_s \quad (\text{VI.9.1})$$

(tenendo presente che $u=U \sin \varphi_s$). La grandezza K è definita da

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = -K \frac{\delta E}{E} \quad (\text{VI.9.2})$$

K è dato dalla (V.3.21), e, per il race-track, dalla (VI.2.24). Entrambe queste espressioni si possono mettere sotto la forma seguente (ricordando la (III.4.5))

$$K = \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{\Lambda(1-n)} - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2 \right\} \quad (\text{VI.9.3})$$

(ove Λ , dato dalla (VI.6.22) per il race-track, è naturalmente uguale a 1 se non vi sono tratti diritti).

Notiamo che il termine $\frac{1}{\Lambda(1-n)}$ non è altro che il rapporto $\omega^2/\omega_r^2 = 1/\nu^2$ tra i quadrati delle frequenze di rotazione e delle oscillazioni radiali (di betatrone) (*). Il numero ν rappresenta in sostanza il numero di oscillazioni compiute in un giro ed è sempre minore di 1. Essendo $E_0 \leq E$, ne segue che è sempre $K > 0$ (il che significa (cfr. § V-3) che si ha stabilità di fase per $0 < \varphi_s < \pi/2$).

(*) Nel caso del race-track il numero $\nu^2 = \frac{\omega_r^2}{\omega^2}$ è dato in realtà da $\nu^2 = (1-n)\Lambda^2/\omega^2$. Tuttavia quando $1/\omega \ll 1$ si vede subito

Nel caso del sincrotrone a G.A. il K che soddisfa la (VI.9.2) e che figura nella (VI.9.1) ha ancora una forma analoga alla (VI.9.3)

$$K = \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{\nu^2} - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2 \right\} \quad (\text{VI.9.4})$$

in cui ν ha ancora lo stesso significato. In questo caso però $\nu > 1$ (generalmente $\nu \sim 4+5$). Quindi per energie inferiori ad un valore E_t detto energia di transizione e dato da

$$E_t = \nu E_0 \quad (\text{VI.9.5})$$

risulta $K < 0$. Dalla (VI.9.1) segue che per $E < E_t$ si ha stabilità non più per $\cos \varphi_s > 0$, ma per $\cos \varphi_s < 0$. Questo significa che per la particella sincrona è $\frac{\pi}{2} < \varphi_s < \pi$: essa passerà nella cavità a r.f. in fase di campo elettrico acceleratore crescente.

Quando le particelle raggiungono l'energia di transizione ($K=0$) non c'è più stabilità di fase ($\Omega=0$); questo è un momento molto delicato nel funzionamento della macchina, poichè i pacchetti finora formati tendono a disperdersi e l'ampiezza delle oscillazioni aumenta fortemente. Per non perdere una frazione enorme delle particelle è necessario che, quando esse passano attraverso l'energia di transizione, l'oscillatore cambi bruscamente di fase. In questo caso si trova che l'ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone, pur presentando un massimo, rimane limitata (fig.59).

Quando è possibile conviene, per evitare queste difficoltà, iniettare le particelle già al disopra dell'energia di transizione. Questo è generalmente realizzabile nei sincrotroni per elettroni, ove l'energia di transizione è dell'ordine di 2 MeV.

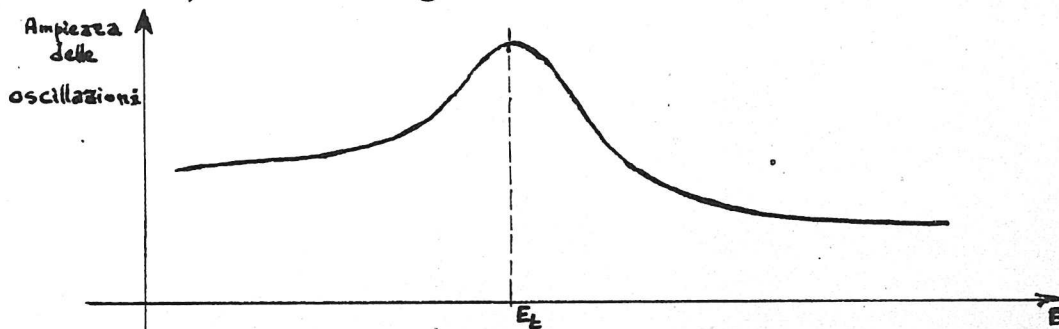


Fig. 59

§ VI-10. Esempi di realizzazione di sincrotroni a G.A.

A tutt'oggi (1958)^(*) i sincrotroni a G.A. costruiti o in via di costruzione sono i seguenti:

Part. acc.	Luogo	Energia massima (GeV)	Data prevista di funzionam.
prot.	U.R.S.S	7	1959
prot.	CERN (Ginevra)	25	1960
prot.	Brookhaven Nat. Lab. (U.S.A)	25 - 30	1960
elett.	Univ. Bonn (Germ.)	0,5	1958
elett.	Cornell Univ. (U.S.A)	1 - 1,5	in funzione
elett.	Roy. Inst. Techn. Stoccolma (Svezia)	1,2	1959
elett.	M.I.T. - Harvard Univ. (U.S.A)	7	1960

Altre macchine su questo principio sono in fase di progetto.

Descriveremo ora più in dettaglio le caratteristiche di un sincrotrone a G.A. per elettroni e di uno per protoni, e precisamente del sincrotrone per elettroni da 1,5 GeV dell'Università di Cornell (Ithaca, U.S.A) e del sincrotrone per protoni da 25 GeV del CERN (Ginevra).

Il sincrotrone di Cornell è di particolare interesse, perchè è stata la prima macchina a G.A. che è entrata in funzione, ed ha confermato sperimentalmente l'efficacia dell'applicazione di tale principio. Essa funziona dal 1956, raggiungendo per ora l'energia di 1 GeV. La sua costruzione iniziò nel 1953,

(*) Cfr.: Rendiconti del Symposium del CERN (1956); D.L. JUDD - Conceptual Advances in Accelerators - Ann. Rev. of Nuclear Science, 8, 181 (1958).

poco dopo la proposta di Livingston, Courant e Snyder, quando ancora la questione delle risonanze non era stata studiata a fondo. In seguito la considerazione dettagliata delle risonanze consigliò di modificare il progetto iniziale. Lo schema attuale consiste di quattro quadranti, ciascuno dei quali è un elemento periodico la cui struttura è indicata in fig. 54.

Il raggio dell'orbita è 3,81 m, mentre il diametro complessivo della macchina è 9,12 m. Il campo magnetico varia sinusoidalmente con frequenza di 30 hertz. E' applicato un bias in modo che si possa utilizzare per l'accelerazione (cfr. § V-7) quasi un intero semiperiodo. Il valore massimo del campo magnetico^(*) è 0,88 weber/m², corrispondente ad una corrente di alimentazione del magnete di 2000 A.

L'accelerazione è prodotta da due cavità, di cui una, a frequenza modulata variabile del 2%, ha tensione massima di 5 KV e funziona per 0,5 msec dopo l'iniezione; l'altra, a frequenza fissa, ha tensione massima crescente linearmente fino a 30 KV e resta accesa per 15 msec. Si è scelto $k=8$.

Gli elettroni sono accelerati fino a 2 MeV da un Van de Graaff ed iniettati nella macchina attraverso un deflettore elettrostatico con tensione deviatrice di 30KV. Il Van de Graaff dà un'intensità di 100 mA.

L'intensità ottenuta è di 10⁹ elettroni per impulso, ma si spera di migliorare questo valore di uno o due ordini di grandezza.

Il protosincrotrone del CERN (v. anche tabella nel § I-9) è in stato di avanzata costruzione. Il suo raggio è di 100 metri ed il magnete è disposto in una galleria sotterranea circolare. Il magnete consiste di 50 elementi periodici, ciascuno dei quali ha la struttura seguente

(*) I dati che riportiamo qui si riferiscono ad una energia massima di 1 GeV.

$n=-288.4$	$n=+288.4$	$B=0$	$n=288.4$	$n=-288.4$	$B=0$
2.2 m	2.2 m	1.6m	2.2 m	2.2 m	1.6m

Si vede quindi che i tratti rettilinei ($B=0$) sono compresi alternativamente tra settori con $n < 0$ e tra settori con $n > 0$. Le coppie di settori contigui con n di segno opposto constano di due elementi rigidamente connessi, che, per facilitare la costruzione, sono rettilinei e disposti tangenzialmente all'orbita principale. Si raggruppano cinque elementi periodici consecutivi in un cosiddetto "superperiodo". Ognuno di questi superperiodi ha due delle dieci sezioni diritte più lunghe del normale (3 m), disposte una tra due settori con $n > 0$ e l'altra tra due settori con $n < 0$. In queste sezioni diritte lunghe sono collocate le 16 cavità doppie a r.f.. Nella macchina vi sono anche 30 paia di lenti magnetiche (v. Appendice II), di cui 10 paia di lenti quadripolari lineari ed altre 20 paia di lenti più complicate non lineari.

Il campo magnetico varia linearmente da 0 a $1,2 \text{ wb/m}^2$ (v. fig. 60) con un periodo di 2 sec.

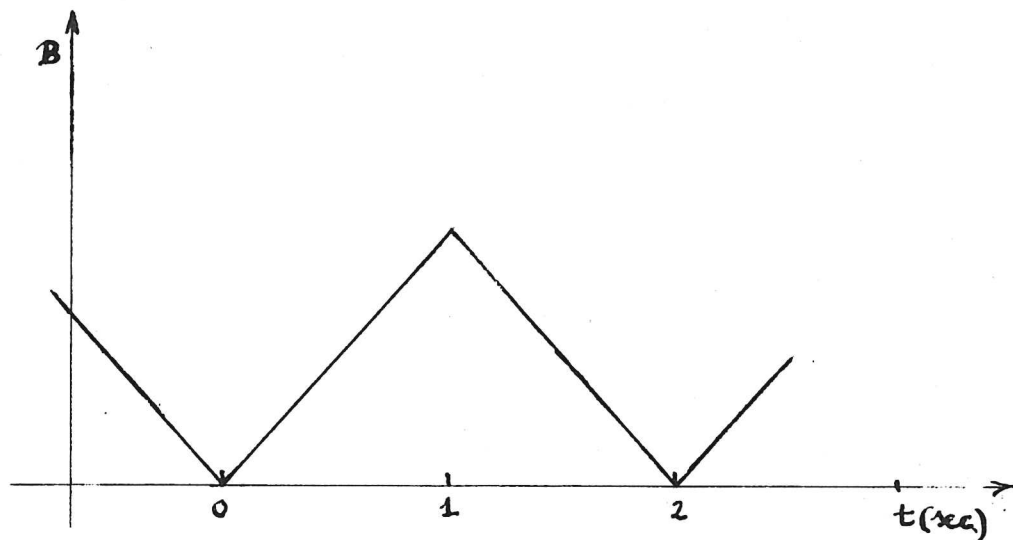


Fig. 60

Al campo massimo corrisponde un raggio di curvatura di 70,079 m per una particella di 24,3 GeV.

Le cavità hanno tensione di cresta di 108 KV; la loro frequenza (poichè si è scelto $k=20$) è modulata da 2,9 a 9,55 Mhz. L'energia di transizione è 5,7 GeV.

L'iniezione avviene a 50 MeV (quando $B = 147$ gauss = $0,0147$ wb/m²) per mezzo di un acceleratore lineare lungo 30 m. Il tempo di iniezione è 6 μ sec.

La ciambella ha sezione ellittica con assi di lunghezza 7 cm (verticale) e 14,5 cm (orizzontale). (Si noti la piccolezza di queste dimensioni rispetto al raggio della macchina). Perchè il fascetto possa compiere un gran numero di giri in una ciambella così stretta è necessaria una grande precisione nella disposizione dei settori. Più precisamente la tolleranza è di 0,3 mm in senso verticale e di 0,6 mm in senso orizzontale (precisione relativa di $6 \cdot 10^{-6}$). Per raggiungere questa elevata precisione, la regione

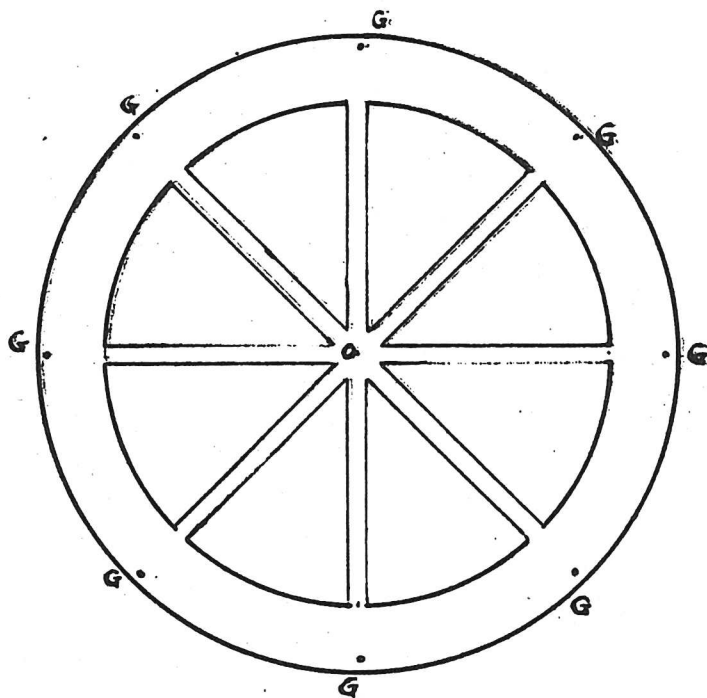


Fig. 61

interna alla galleria del magnete è solcata da otto gallerie radiali (v. fig. 61) alla cui estremità è situato un "punto geodetico" G, la cui distanza dal centro O è determinata con la precisione richiesta mediante un filo di invar steso lungo la galleria radiale. I punti G determinano a loro volta le basi per una triangolazione geodetica che fissa la posizione dei vari settori.

Affinchè i cedimenti del terreno non compromettano la precisione in senso verticale, il magnete è poggiato su un unico anello rigido di cemento, il quale a sua volta poggia (con particolari dispositivi compensativi) su un basamento profondo di calcestruzzo che giunge fino alla roccia sottostante.

CAPITOLO VII

I CICLOTRONI

§ VII-1. Fase di una particella in un ciclotrone

Il funzionamento in linea di principio del ciclotrone a frequenza fissa e del sincrociclotrone è stato già trattato nei §§ I-6, I-7. Daremo ora una trattazione più dettagliata uti lizzando alcune delle nozioni introdotte nei capitoli precedenti, in particolare quella di stabilità orizzontale e verticale e quella di fase.

La tensione acceleratrice V tra le D (in fig. 62 assumiamo convenzionalmente $V \equiv V_B - V_A$) ha, come già detto, un andamento sinusoidale e può essere espressa dalla formula

$$V = U \text{ sen } \omega_e t \quad (\text{VII.1.1})$$

ove $U > 0$ è costante, e ω_e è la pulsazione della r.f. (*) costante per il ciclotrone e variabile lentamente per il sincrociclotrone.

Definiremo come fase di una particella, analogamente a quanto si è fatto per il sincrotrone (cfr. (V.2.1)), la grandezza seguente:

$$\varphi = \vartheta - \omega_e t + \pi \quad (\text{VII.1.2})$$

(*) L'ordine di grandezza della frequenza ω_e è fissato dalla formula (I.6.3)

$$\omega_e = c^2 q \frac{B}{E} \simeq c^2 q \frac{B}{E_0} \quad (\text{VII.1.1'})$$

una volta dato B , il quale a sua volta è limitato dalla saturazione del ferro a ~ 2 wb/m². Per $B = 1,5$ wb/m² si ha:

$$\omega_e \simeq 23 \text{ Mhz per protoni} \quad (\lambda \simeq 13 \text{ m})$$

$$\omega_e \simeq 11 \text{ Mhz per deutoni e particelle } \alpha \quad (\lambda \simeq 26 \text{ m}).$$

Si hanno dunque radiofrequenze nel campo delle onde corte.

L'angolo ϑ è misurato a partire dall'intercapedine (cfr. fig.

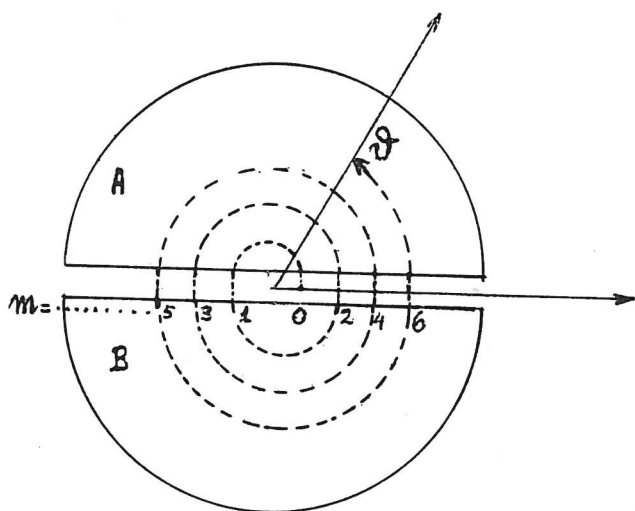


Fig. 62

62 ove è indicata schematicamente con una linea tratteggiata la parte iniziale di un'orbita; $m=0, 1, 2, \dots$ rappresenta il numero dei passaggi attraverso l'intercapedine). Il guadagno di energia ad ogni passaggio ($\vartheta = m\pi$) è dato da (cfr. (VII.1.1), (VII.1.2)):

$$\Delta E = (-1)^m q V = q U \text{ sen } \varphi \quad (\text{VII.1.3})$$

Derivando la (VII.1.2) si ha ($\dot{\vartheta} \equiv \omega$):

$$\dot{\varphi} = \omega - \omega_e - \dot{\omega}_e t \quad (\text{VII.1.4})$$

L'ultimo termine è rigorosamente nullo nel ciclotrone a frequenza fissa, ma anche nel sincrociclotrone è trascurabile. Inoltre per la (I.6.3) (tenendo conto della (I.2.6)) si ha

$$\omega = c^2 q \frac{B}{E} \quad (\text{VII.1.5})$$

e quindi

$$\dot{\varphi} = c^2 q \frac{B}{E} - \omega_e \quad (\text{VII.1.6})$$

§ VII-2. Stabilità delle oscillazioni orizzontali e verticali nei ciclotroni

La teoria delle oscillazioni di betatrone, già svolta nel Cap. IV, si applica anche ai ciclotroni. In particolare, anche per questi si definisce l'indice del campo n secondo la solita formula

$$n = - \frac{\partial \log B}{\partial \log r} = - \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \quad (\text{VII.2.1})$$

e si ha stabilità orizzontale per $n < 1$ e verticale per $n > 0$. Poichè B deve essere quasi uniforme si prende n assai piccolo, generalmente crescente linearmente dal centro ($n=0$) alla periferia ($n \approx 0,1$). Si ha quindi forte stabilità orizzontale, ma debole stabilità verticale. La stabilità verticale, che è quella che più interessa per limitare l'altezza della camera a vuoto, è però fortemente accresciuta da un effetto di focalizzazione elettrica che la particella subisce ogni volta che si trova a passare nell'intercapedine tra le D. Questo effetto è sostanzialmente un effetto di "lente elettrostatica" analogo a quello considerato nel § II-1. In particolare la figura corrispondente (fig. ^{fig. 33} 16) può essere interpretata come uno schema dell'andamento delle linee di forza del campo elettrico in una sezione delle D con un piano perpendicolare all'intercapedine (E_1, E_2 allora rappresentano le estremità delle D). Nel caso presente si deve tener conto che il campo elettrico varia durante il passaggio della particella. E' chiaro che se il campo è in fase decrescente l'effetto focalizzante è esaltato, e nel caso opposto l'effetto è diminuito. Questa modificazione della focalizzazione è tanto più sensibile quanto minore è la velocità della particella nell'intercapedine.

Uno studio dettagliato del problema della focalizzazione verticale nel ciclotrone è stato fatto da M.E. Rose^(*). In definitiva si trova che la frequenza delle oscillazioni verticali è data dalla formula seguente, in cui il primo termine sotto il

(*) M.E. ROSE, Phys.Rev. 53, pag. 392 (1938).

radicale rappresenta l'effetto del campo magnetico (identico a quello del sincrotrone) ed il secondo termine l'effetto delle lenti elettrostatiche:

$$\omega_z = \omega \sqrt{n + \frac{qU}{\pi T} \cos\varphi} \quad \text{(VII.2.2)}$$

dove T è l'energia cinetica.

Da questa formula si vede che, come si è detto nell'analisi qualitativa, l'effetto delle lenti elettrostatiche porta ad un miglioramento della focalizzazione per particelle che incontrino il campo in fase decrescente ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ e quindi $\cos \varphi > 0$); se incontrano il campo in fase crescente ($\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$) si ha diminuzione di focalizzazione ed addirittura instabilità per

$$\cos\varphi < - \frac{n\pi T}{qU} \quad \text{(VII.2.3)}$$

Inoltre dalla (VII.2.2) si vede che il termine di focalizzazione elettrica è inversamente proporzionale a T ed è quindi molto importante all'inizio dell'accelerazione. Nella fase finale dell'accelerazione prevale invece la focalizzazione magnetica.

§ VII-3. Variazione della fase nel ciclotrone a frequenza fissa

Nel ciclotrone a frequenza fissa, ove $\omega_e = \text{cost.}$, non vi può essere una particella sincrona (cioè con $\varphi = \text{cost.}$). Infatti dalla (VII.1.6) si dovrebbe in tal caso avere

$$\frac{B}{E} = \frac{\omega_e}{qc^2} = \text{cost.} \quad (\text{VII.3.1})$$

ossia B crescente verso la periferia. Questo darebbe luogo a $n < 0$, e vi sarebbe instabilità verticale.

Si cerca quindi di rendere lenta la variazione di φ con l'energia. Per vedere come questo si possa realizzare, consideriamo la variazione $\Delta\varphi$ della fase in mezzo giro ed il corrispondente incremento di energia ΔE in un passaggio. Questa ultima grandezza è data dalla (VII.1.3). Per quanto riguarda $\Delta\varphi$ osserviamo che si ha una variazione brusca della fase solo in corrispondenza dei passaggi per l'intercapedine; tuttavia prenderemo in considerazione, anzichè tale variazione a scatti, una variazione continua (praticamente lineare in un giro) che la approssimi (*). Si può quindi porre

$$\Delta\varphi \approx \dot{\varphi} \frac{\pi}{\omega} \quad (\text{VII.3.2})$$

e, ricordando (VII.1.5), (VII.1.6),

$$\Delta\varphi \approx \pi \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega}\right) \quad (\text{VII.3.3})$$

Avremo quindi

$$\frac{d\varphi}{dE} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta E} = \frac{\pi}{qU \sin\varphi} \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega}\right) \quad (\text{VII.3.4})$$

da cui

$$d \cos\varphi = -\frac{\pi}{qU} \left(1 - \frac{\omega_e}{c^2 q B} E\right) dE \quad (\text{VII.3.5})$$

(*) Questa approssimazione è analoga a quella fatta nel § V-3 (v. fig. 41).

Possiamo trascurare la lenta variazione di B; integrando otteniamo (chiamando φ_0 la fase iniziale e notando che l'energia iniziale vale proprio E_0 , cioè l'energia di riposo):

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 + \frac{\pi}{qU} \left[\frac{\omega_e}{2c^2 q B} (E^2 - E_0^2) - (E - E_0) \right] \quad (\text{VII.3.6})$$

Se si riporta $\cos \varphi$ in funzione di E, secondo la (VII.3.6), per diversi valori di $\cos \varphi_0$, si trova una famiglia di parabole con la concavità rivolta verso l'alto, differenti solo per una traslazione lungo l'asse delle ordinate.

Naturalmente di queste curve interesserà solo quella parte contenuta nella regione $E \geq E_0$, $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ (fig. 63). In confronto con il sincrotrone si può dire che nel ciclotrone si utilizza solo mezza oscillazione di fase.

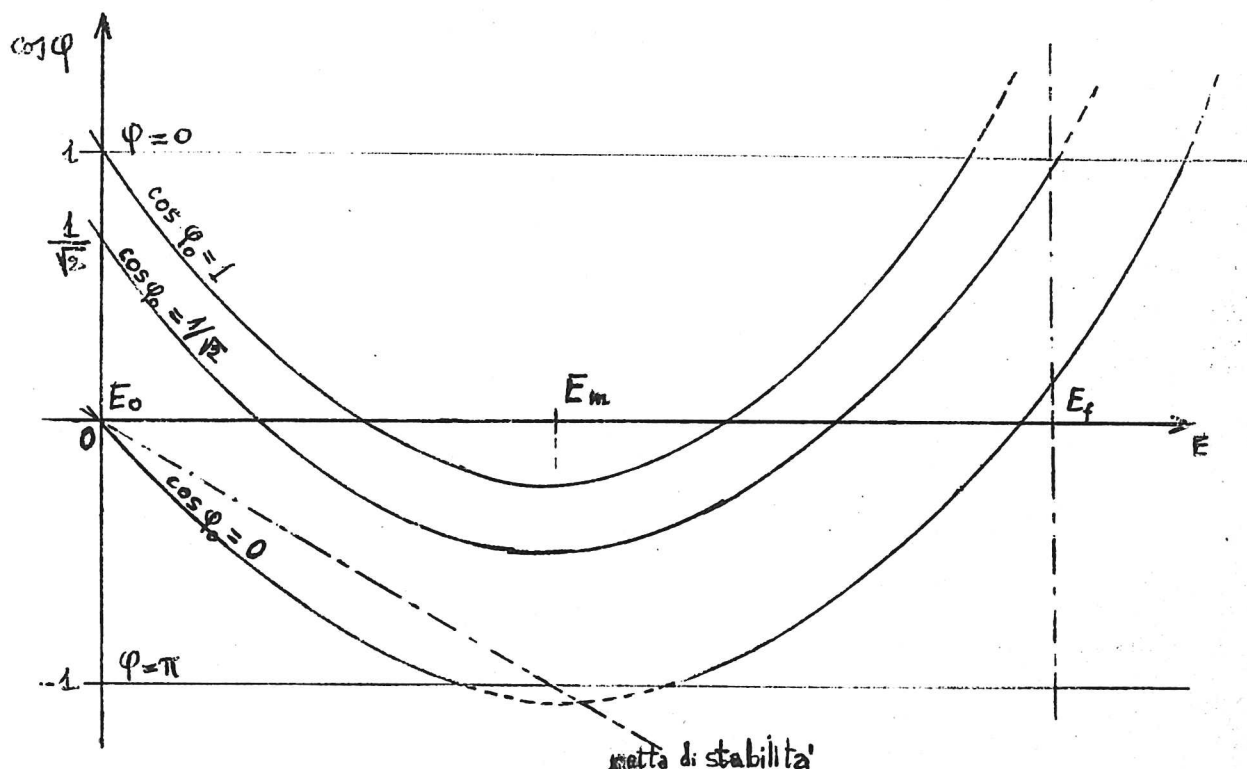


Fig. 63

Dalla (VII.3.6) si trova che il minimo di $\cos \varphi$ si ha per

$$E = E_m = E_0 \frac{\omega_0}{\omega_e} \quad (\text{VII.3.7})$$

ove $\omega_0 = \frac{c^2 q B}{E_0}$ è la pulsazione già considerata nel § I-6. Affinchè la fase vari poco nel ciclo di accelerazione da E_0 all'ener-

gia finale E_f , conviene che E_m cada circa a metà di questo intervallo: si prenderà dunque

$$\omega_e \simeq \omega_0 \frac{2 E_0}{E_0 + E_f} \quad (\text{VII.3.8})$$

Dalla fig. 63 si vede subito che non tutti i valori della fase iniziale φ_0 sono permessi. Infatti non sono utilizzabili quei valori di φ_0 che danno luogo a curve troppo "basse", tali da rendere $\cos \varphi < -1$ (quale, a puro titolo di esempio, quella per $\cos \varphi_0 = 0$ in fig. 63). Una ulteriore limitazione su φ_0 è imposta dal valore dell'energia finale E_f (dipendente sostanzialmente dal raggio dei poli del magnete: cfr. (I.6.4)). Non sono utilizzabili quelle curve troppo "alte", tali da rendere $\cos \varphi > 1$ già per $E < E_f$ (cfr. in fig. 63 la curva $\cos \varphi_0 = 1$).

Un'altra limitazione su φ_0 si ha tenendo conto della condizione di stabilità

$$\cos \varphi > \frac{\pi n (E - E_0)}{q U} \quad (\text{VII.3.9})$$

che discende dalla (VII.2.3). Infatti se si riporta in fig. 63 la retta di equazione $\cos \varphi = -\frac{\pi n (E - E_0)}{q U}$, ivi indicata a tratto e punto, non sono utilizzabili tutte quelle curve che hanno una porzione al disotto di essa. In definitiva, per una data energia finale, tenendo conto di tutte le limitazioni sopra elencate si trova che sono utilizzati nell'accelerazione solo i valori della fase iniziale φ_0 compresi in un intervallo (più o meno ristretto) φ_{max} , φ_{min} (cfr. figg. 64a, 64b). I due casi della figura differiscono tra loro per la condizione che impone il limite inferiore a φ_0 . Nel caso a) la condizione di stabilità è la più stringente; nel caso b) è più stringente la condizione $\cos \varphi > -1$. Naturalmente il verificarsi dell'uno o dell'altro caso dipende dalla pendenza delle curve, cioè dalle caratteristiche della macchina.

Notiamo che l'ampiezza dell'intervallo $\varphi_{max} - \varphi_{min}$ condi

zione l'intensità ottenibile; infatti quanto più è grande tale intervallo, tanto maggiore è il numero di particelle che giungono sino alla fine del ciclo di accelerazione.

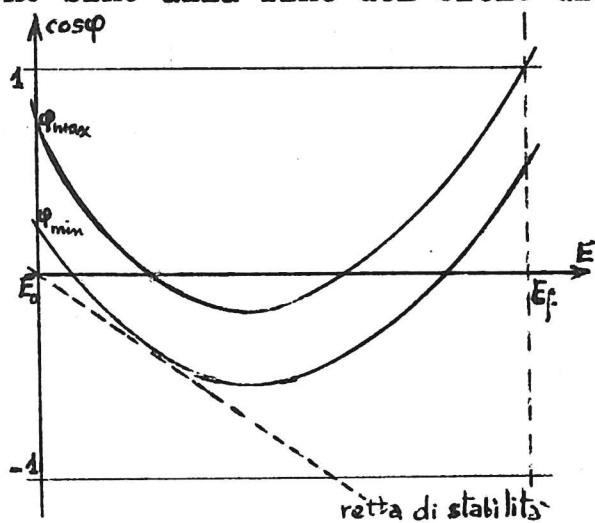


Fig. 64a

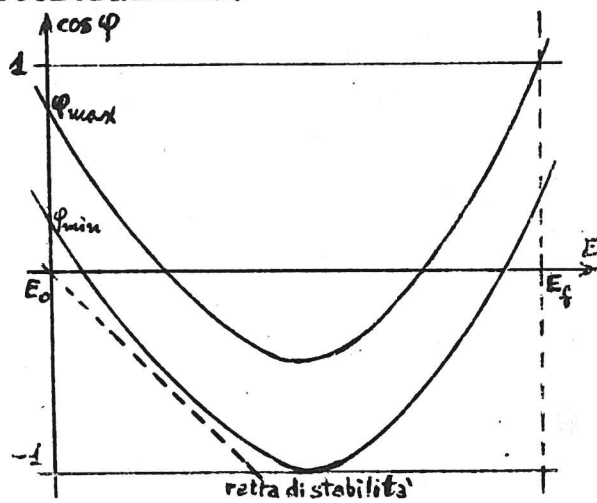


Fig. 64b

§ VII-4. Limitazioni all'energia ottenibile con un ciclotrone

In questo paragrafo mostreremo che in un ciclotrone per cui si sia fissato il valore di U , l'energia finale E_f ottenibile è limitata, anche prescindendo dal diametro dei poli del magnete (cioè anche per macchine di diametro illimitato).

Supponiamo per semplicità di trovarci nel caso di fig. 64b, in cui si può prescindere dalla retta di stabilità.

Consideriamo innanzitutto la grandezza E_m , data dalla (VII.3.7); essa dipende solo dal rapporto B/ω_e (oltre che dalla carica delle particelle). Questa grandezza determina il valore minimo φ_{min} della fase iniziale φ_0 , che risulta fissato dalla (VII.3.6) ove si ponga $E = E_m$, $\cos \varphi = -1$. Si ottiene

$$\cos \varphi_{min} = \frac{\pi}{qU} \frac{(E_m - E_0)^2}{2E_m} - 1 \quad (\text{VII.4.1})$$

Si vede quindi che, poichè $\cos \varphi_{min} \leq 1$, deve essere

$$E_m \leq E_m^*$$

ove E_m^* è la soluzione dell'equazione $\cos \varphi_{min} = +1$, e cioè

$$E_m^* = E_0 + \frac{2qU}{\pi} + \sqrt{\frac{4qU}{\pi} \left(E_0 + \frac{qU}{\pi} \right)} \simeq E_0 + 2\sqrt{\frac{qU}{\pi}} E_0 \quad (\text{VII.4.2})$$

per $qU \ll E_0$ (come si verifica per protoni, deutoni e ioni pesanti). Questa relazione impone un limite superiore al rapporto B/ω_e , una volta fissato U .

Considerando il caso di un φ_{min} generico, si nota (v. fig. 65) che se l'energia finale E_f è minore del valore E_1 è utilizzato il massimo numero di particelle ($\cos \varphi_{min} < \cos \varphi_0 < 1$); se $E_f > E_2$ nessuna particella giunge alla fine del ciclo di accelerazione; se $E_1 < E_f < E_2$ è utilizzata solo una parte delle particelle iniettate. Ha quindi interesse calcolare questo valore E_2 che, per valori di U e φ_{min} (cioè E_m) fissati, non può essere superato nemmeno a scapito dell'intensità. Per fare ciò basta considerare la (VII.3.6) con $\cos \varphi_0 = \cos \varphi_{min}$ (dato dalla (VII.4.1) e cercare il valore di E per cui $\cos \varphi = 1$. Si trova

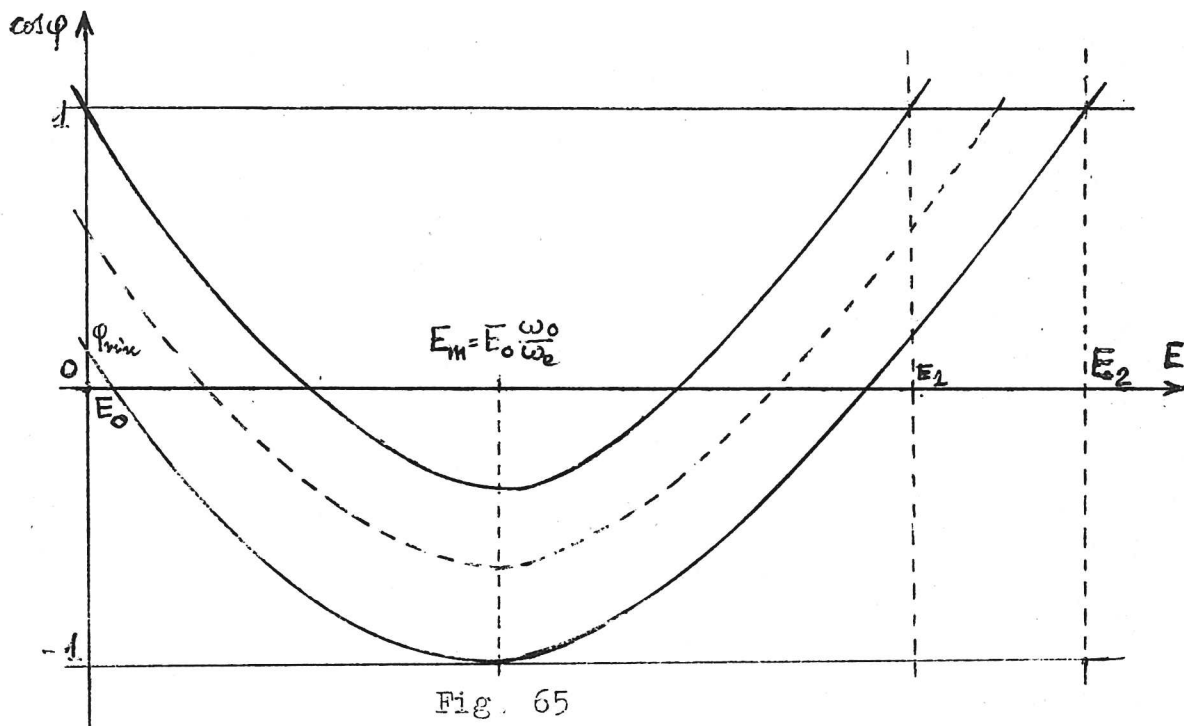


Fig. 65

$$E_2 = E_m + \sqrt{\frac{4}{\pi} qU E_m} \quad (\text{VII.4.3})$$

Il massimo E^* di tale grandezza E_2 (dipendente ancora da U) rappresenta un'energia che non può essere superata in nessuna maniera, una volta fissato il valore della tensione di cresta. Tale valore rappresenta dunque un limite superiore teorico per E_f .

(In pratica, per ragioni di intensità, E_f non potrà nemmeno raggiungere tale valore). E^* si può calcolare dalla (VII.4.3) ponendo in essa $E_m = E_m^*$ dato dalla (VII.4.2). Si ottiene

$$E^* = E_0 + 2 \left(\frac{2qU}{\pi} + \sqrt{\frac{4qU}{\pi} \left(E_0 + \frac{qU}{\pi} \right)} \right) \simeq E_0 + 4 \sqrt{\frac{qU}{\pi}} E_0 \quad (\text{VII.4.4})$$

che si può scrivere anche sotto la forma

$$E^* = E_0 + 2(E_m^* - E_0) \quad (\text{VII.4.5})$$

che mostra che in tal caso il valore E_m cade esattamente a metà dell'intervallo $E_f - E_0$. Questo era da aspettarsi in quanto la scelta $E_m = E_m^*$ corrisponde a $\cos \varphi_{\min} = 1$, e si ha la curva indicata in fig. 66.

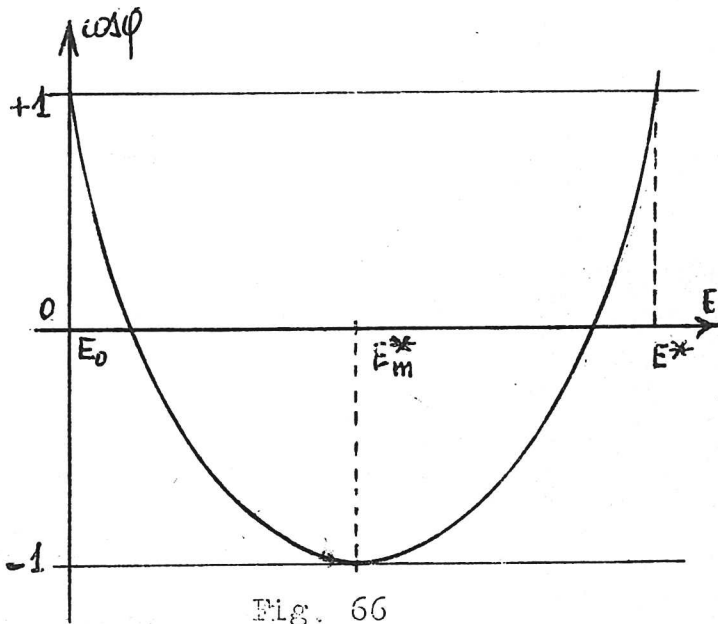


Fig. 66

Questo limite superiore, come si è detto, ha importanza soltanto teorica perchè corrisponde ad intensità zero ($\varphi_{\min} = \varphi_{\max}$). In pratica si sceglie $\cos \varphi_{\min} < 1$ e quindi E_f minore del corrispondente E_2 dato dalla (VII.4.3). E' però in ogni caso interessante determinare per le varie particelle il limite all'energia cinetica raggiungibile,

$T^* = E^* - E_0$; usando l'espressione approssimata della (VII.4.4) ($qU/\pi \ll E_0$) si ha

$$T^* \simeq 4 \sqrt{\frac{qU}{\pi}} E_0 \quad (\text{VII.4.6})$$

Per $U \simeq 10^5 \text{ V}$ (che è il massimo ordine di grandezza realizzabile in pratica) segue

$$T^* \simeq 22,5 \text{ MeV} \quad \text{per protoni } (E_0 \simeq 10^9 \text{ eV})$$

$$T^* \simeq 32 \text{ MeV} \quad \text{per deutoni } (E_0 \simeq 2 \cdot 10^9 \text{ eV}).$$

Per elettroni si sarebbe trovato $T^* \simeq 0,6 \text{ MeV}$.

§ VII-5. Cenno sui problemi tecnici del ciclotrone.

Diamo ora qualche dettaglio riguardante alcuni dei principali problemi tecnici che si presentano nella realizzazione pratica del ciclotrone.

Le D presentano una certa capacità verso massa ed una capacità mutua fra loro. Esse possono essere utilizzate per formare un circuito risonante accoppiato con il generatore.

Indichiamo in fig. 67 lo schema più elementare di tale accoppiamento:

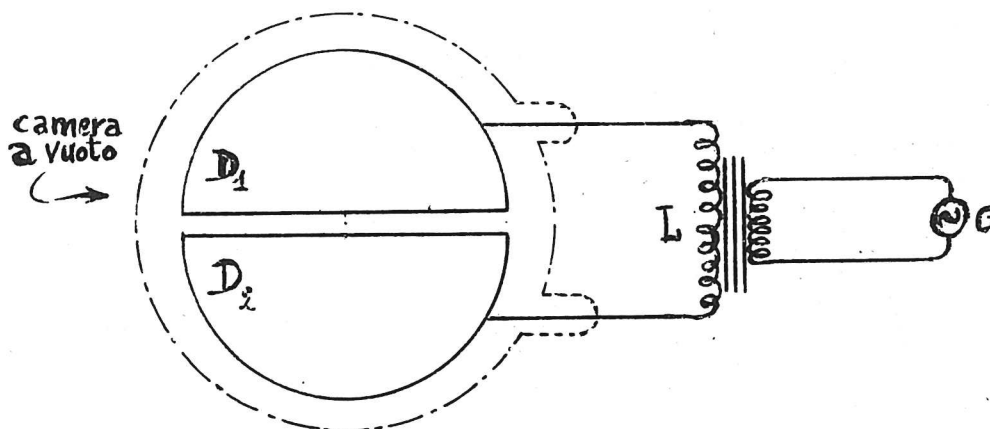


Fig. 67

L va scelta in modo che $\omega_e = 1/\sqrt{LC}$, detta C la capacità equivalente del sistema delle D. Poichè C è sempre piuttosto grande e ω_e è fissato dalla (VII.1.1') (nota nel § VII-1), il valore di L risulta basso: quindi si ha lo svantaggio che l'accoppiamento tra generatore e D è debole. Inoltre il sistema irraggia molta energia.

Le macchine moderne, invece, per evitare questi inconvenienti, utilizzano lo schema di fig. 68, in cui la r.f. è portata alle D attraverso due linee coassiali T₁, T₂ chiuse a quarto d'onda. Queste hanno come conduttore esterno la parete stessa della camera a vuoto (metallizzata) e come conduttore centrale una sbarra metallica che serve anche come sostegno meccanico delle D.

Le due linee sono quindi collegate al generatore direttamente oppure con due spire d'accoppiamento (v. fig. 68). In questo modo si riducono le perdite per irraggiamento e si possono ottenere tensioni fino a 200 KV tra le D.

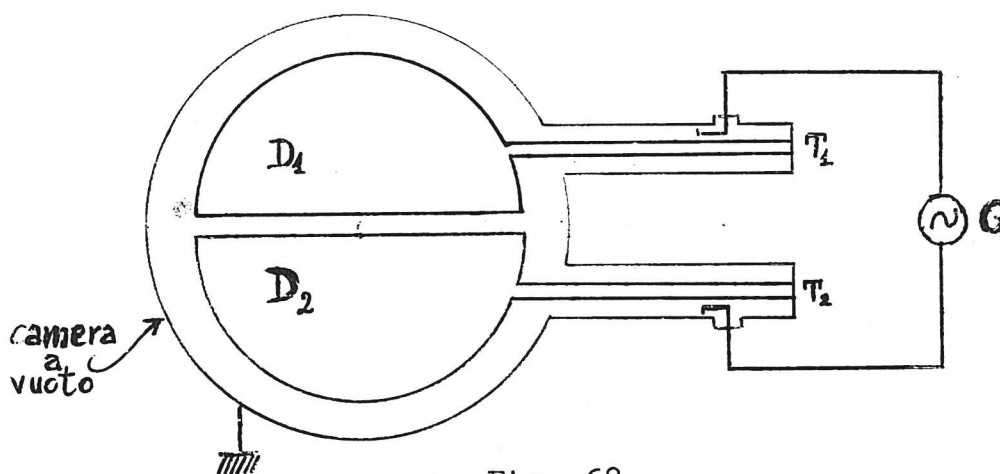


Fig. 68

L'estrazione del fascio dalle D del ciclotrone è generalmente ottenuta per mezzo di un dispositivo detto "peeler", che consiste di uno schermo di ferro che scherma una zona della macchina dal campo magnetico. Le particelle, giungendo in questa zona, non vengono più deflesse e sfuggono verso l'esterno. In alcune macchine si usano deflettori elettrostatici.

Il bersaglio normalmente è collocato nell'interno della camera a vuoto; in certi casi invece esso si trova all'esterno, ed il fascio esce dalla camera a vuoto attraverso una finestra chiusa da un sottile foglio metallico.

Per i ciclotroni è particolarmente laboriosa l'operazione di degassamento, data la presenza di estese superfici metalliche. Tale operazione può durare varie settimane e viene agevolata producendo all'uopo scariche elettriche tra le D.

§ VII-6. Il microtrone

Il microtrone è un acceleratore per elettroni che si può far rientrare fra i ciclotroni in quanto impiega una cavità a r.f. con frequenza fissa per l'accelerazione delle particelle ed un campo magnetico costante ed uniforme che fa compiere loro traiettorie circolari di raggio crescente. La pianta schematica di un microtrone è indicata in fig. 69.

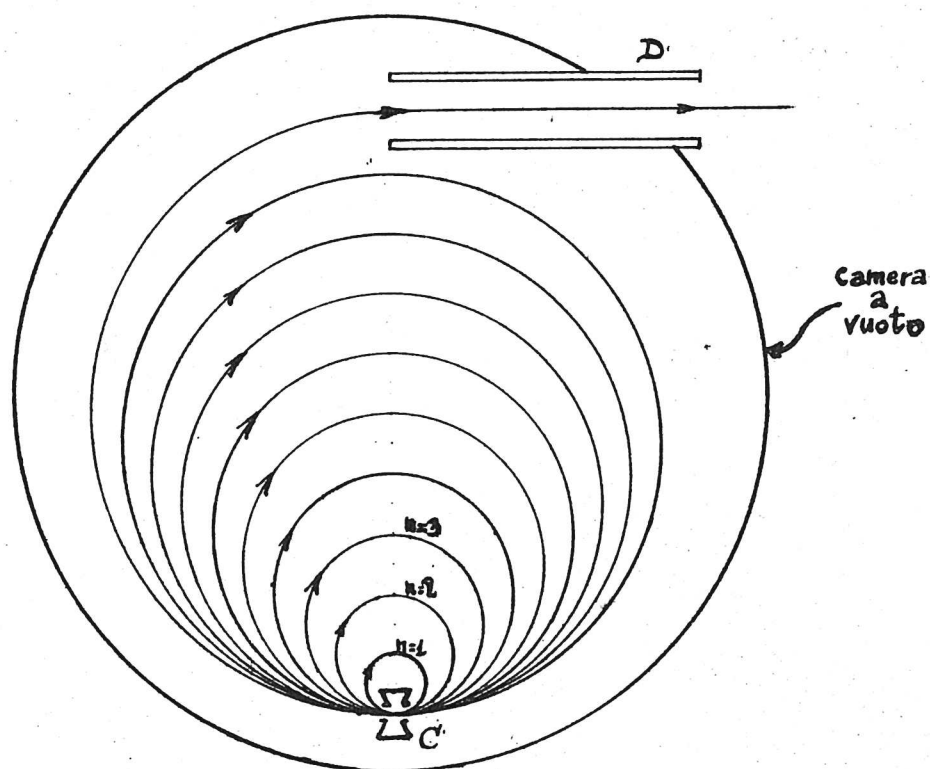


fig. 69

C è la cavità acceleratrice a r.f. che ha la forma indicata in fig. 70: essa è alimentata attraverso una guida d'onda.

Gli elettroni percorrono orbite circolari tangenti tra loro ed all'asse della cavità. Poichè ad ogni passaggio

$$v = \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{h}{m_e} \frac{2\pi}{c \tau} = \frac{2\pi h}{m_e c \tau} E_n$$

attraverso la cavità essi vengono accelerati, aumenta il raggio dell'orbita ed il tempo τ impiegato a compiere un giro. Se si indicano con un indice n le grandezze che si riferiscono alla particella che compie l' n -esimo giro, si avrà

$$\tau_n = \frac{2\pi}{c e B} E_n \quad (n=1,2,\dots) \quad (\text{VII.6.1})$$

($-e$ è la carica dell'elettrone).

Perchè l'elettrone trovi sempre il campo elettrico nella cavità nella stessa fase (tale da accelerarlo) basta richiedere che il tempo τ_n sia (per ogni n) un multiplo intero del periodo T_e del campo elettrico acceleratore.

Per l'accelerazione si utilizzano gli elettroni estratti a freddo, per effetto del campo elettrico oscillante, dalle pareti del-

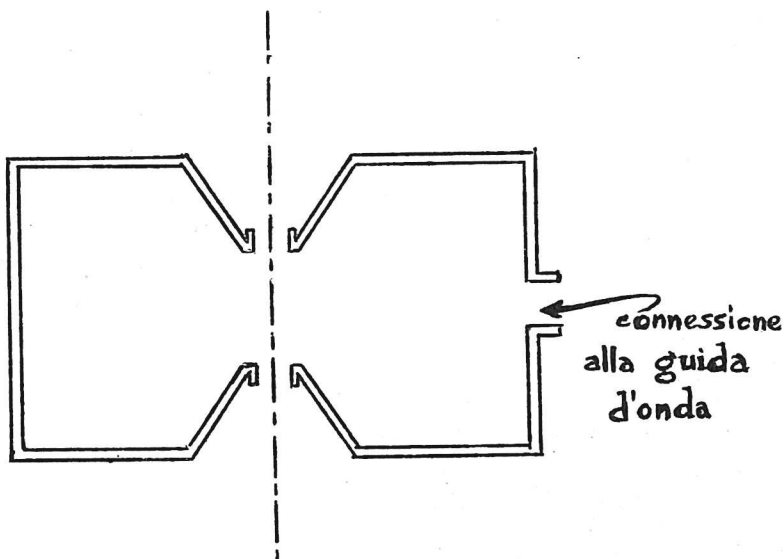


Fig. 70

la cavità. Poichè la loro energia cinetica iniziale è quindi nulla, si avrà

$$E_n = E_0 + neU \text{ sen } \varphi \quad (n=1,2,\dots) \quad (\text{VII.6.2})$$

ove U è il valore di cresta della tensione e φ è la fase incontrata dagli elettroni quando attraversano la cavità.

Poichè da (VII.6.1), (VII.6.2) segue

$$\tau_n - \tau_{n-1} = \frac{2\pi}{c e B} (E_n - E_{n-1}) = \frac{2\pi}{c e B} U \text{ sen } \varphi \quad (\text{VII.6.3})$$

la condizione voluta sui tempi di rotazione (tale che la fase φ si mantenga costante) è soddisfatta se la grandezza (VII.6.3) è un multiplo intero h_1 di T_e

$$\frac{2\pi U \sin \varphi}{c^2 B} = h_1 T_e \quad (\text{VII.6.4})$$

e se τ_1 è anch'esso un multiplo intero h_2 di T_e

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{c^2 e B} (E_0 + e U \sin \varphi) = h_2 T_e \quad (\text{VII.6.5})$$

Dalle (VII.6.4), (VII.6.5) si ricavano

$$U \sin \varphi = \frac{E_0}{e} \frac{h_1}{h_2 - h_1} \quad (\text{VII.6.6})$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{c^2 B e}{E_0} (h_2 - h_1) \quad (\text{VII.6.7})$$

Come si vede, deve essere $h_2 > h_1$. I più piccoli valori che si possono scegliere sono $h_1=1$, $h_2=2$, il che implica $U > E_0/e \simeq \simeq 500$ KV, cioè una tensione molto elevata, tuttavia ottenibile con la tecnica moderna delle microonde. Corrispondentemente si trova, per esempio, per $B = 0,1$ wb/m² una frequenza di 3000 Mhz. Con altre scelte (per es. $h_1=1$, $h_2=3$), si potrebbe usare una tensione U più bassa, ma con una frequenza più alta.

Il vantaggio di usare una tensione acceleratrice elevata è che così si riduce il numero delle rotazioni degli elettroni nella macchina (che sono di solito circa 10) e quindi le perdite dovute agli urti contro le molecole del gas.

Il microtrone presenta lo svantaggio di non avere dispositivi focalizzanti (a parte una piccola focalizzazione elettrostatica nella cavità). Questo costringe a sagomare il magnete con una precisione molto spinta. La mancanza di focalizzazione radiale è meno importante, in quanto anche per piccole deviazioni in senso orizzontale gli elettroni, dopo aver compiuto un giro di 360°, ritornano a passare nella cavità.

Anche nel microtrone si ha stabilità di fase se gli elettroni attraversano la cavità in fase di campo decrescente.

Il microtrone presenta il vantaggio che gli elettroni di diversa energia sono "localizzati" in zone nettamente distinte: cioè il fascio è sempre molto stretto rispetto alla distanza tra due cerchi successivi^(*). Questo fatto permette di estrarre il fascio con poca perdita di elettroni: è sufficiente mettere in corrispondenza del cerchio più esterno un deflettore (per es. magnetico) indicato con D in fig. 69.

Un altro vantaggio del microtrone è che il fascio estratto è molto monoenergetico (entro qualche ‰).

Si osservi che di tutti gli elettroni estratti dalle pareti della cavità solo una piccola frazione ($\sim 1\%$) entra nella prima orbita. Si può pensare di aumentare l'intensità del fascio impiegando una sorgente che inietti gli elettroni nella direzione voluta.

Non sono molti i microtroni finora costruiti; daremo a titolo di esempio alcuni dati relativi al microtrone dell'University of Western Ontario (Canadà), in funzione dal 1947. Esso ha un diametro di 35 cm, un campo magnetico di $0,1 \text{ wb/m}^2$, e dà un fascio di elettroni da 5 MeV con un'intensità media di $0,5 \mu\text{A}$.

E' attualmente in costruzione (1958) presso l'University College, Londra, un microtrone da 30 MeV.

(*) Queste distanze sono tanto maggiori quanto più elevata è la tensione U. Anche questa considerazione consiglia di scegliere un valore di U elevato.

§ VII-7. Il sincrociclotrone

Come già si è accennato nel § I-7, il sincrociclotrone nella sua struttura non differisce molto da un ciclotrone a frequenza fissa. Aggiungiamo qui a quanto detto nel paragrafo citato alcune informazioni ulteriori relative alla costruzione ed alla utilizzazione di tale macchina.

La modulazione della frequenza è comunemente realizzata mediante un condensatore variabile periodicamente, che può essere costituito da due ruote dentate affacciate, una delle quali è posta in rotazione per mezzo di un motore. Tale condensatore è inserito nel circuito oscillante della r.f..

Per quanto riguarda la tensione massima della r.f., ricordiamo che è molto minore che nel ciclotrone (il che è reso possibile dal fatto che le particelle fanno un numero elevato di giri: fino a 50000 nei sincrociclotroni più grandi). Il fatto che non sia necessario un valore elevato di U rende possibile l'uso di una sola D anzichè (come nei ciclotroni ordinari) due D a tensioni opposte: la tensione $U \sin \omega_e t$ è quindi applicata tra la D e la camera a vuoto. Se si usassero due D , oltre ad una maggiore complicazione costruttiva, si dovrebbero usare due distinti modulatori di frequenza in sincronismo.

Per avere stabilità di fase le particelle devono incontrare il campo elettrico acceleratore quando esso è in fase decrescente e non troppo vicino al valore di cresta. Esse trovano così un valore della tensione uguale a circa la metà della tensione massima.

La fase per il sincrociclotrone si definisce allo stesso modo che per il ciclotrone (cfr. (VII.1.2)).

Riguardo alla stabilità orizzontale e verticale ed alla stabilità di fase, si può applicare al sincrociclotrone gran parte delle conclusioni raggiunte per il ciclotrone nei §§ VII-1, 2, 3, purchè si trascuri, come è lecito, il termine in ω_e nella (VII.1.4). In particolare la trattazione matematica fatta nel

§ VII-3 permette ancora di ricavare l'equazione (VII.3.5); tuttavia nell'integrare tale equazione si deve tenere conto della variabilità di ω_e , e ciò porta alla possibilità di definire una particella sincrona, che mantiene la fase φ costante, mentre la fase delle altre particelle oscilla intorno a questa (*).

Notiamo che nei ciclotroni, ove la frequenza è fissa e l'energia finale non può eccedere certi limiti, quando si vogliono accelerare particelle diverse si altera il campo magnetico proporzionalmente a m/q^2 . Per i sincrociclotroni, invece, poichè non vi sono limitazioni così stringenti per l'energia, si preferisce mantenere B costante per i vari tipi di particelle; variano invece le energie finali raggiunte e gli intervalli di modulazione della r.f.. A titolo di esempio riportiamo nella seguente tabella alcuni dati relativi al sincrociclotrone da 184" di Berkeley.

	Frequenza iniz. (Mhz)	Frequenza finale (Mhz)	Energia finale (MeV)	Modulaz. di freq. (%)
Protoni	22,9	19,7	352	15
Deutoni e particelle α	11,4	10,4	206	9,2

Notiamo che volendo accelerare con la stessa r.f. sia protoni che deutoni la frequenza deve essere modulata da 22,9 a 10,4 Mhz, cioè ^{con} una modulazione di 2,3 : 1.

Ricordiamo inoltre che nel sincrociclotrone la sorgente ha funzionamento pulsato, in modo da iniettare le particelle solo per il periodo di tempo durante il quale avviene l'accelerazione (circa un quarto del periodo del ciclo di modulazione della r.f.). Per l'estrazione del fascio si veda quanto detto nel § VII-5 per il ciclotrone.

(*) Per una trattazione dettagliata delle oscillazioni di fase nel sincrociclotrone si veda D. BOHM e L. FOLDY, Phys. Rev. 72, 649 (1947).

Esistono attualmente una decina di sincrociclotroni in cui si ottengono energie finali maggiori di 100 MeV. Diamo qui alcuni dati riguardo al sincrociclotrone del CERN (Ginevra) da 600 MeV (protoni). Il diametro è di 5 m con un campo magnetico di 1 wb/m^2 ; la macchina fornisce 50 impulsi al secondo con $\sim 10^{11}$ particelle per impulso.

§ VII-8. Sorgenti per ciclotroni

Come si è detto nel § I-10, le sorgenti per ciclotroni devono essere progettate con particolari accorgimenti se si vuole ottenere una intensità ragionevole: infatti tali sorgenti si trovano in una zona ove sono presenti forti campi elettrici e magnetici.

In principio si usava un semplice filamento incandescente, posto in vicinanza di una parete della camera a vuoto, con la funzione di emettere elettroni. Questi erano deviati dal campo magnetico, in modo da percorrere un'elica di raggio piccolo, a causa del campo magnetico elevato e della bassa velocità. Si otteneva quindi praticamente un fascetto di elettroni con moto d'insieme parallelo al campo magnetico. Questi producevano ioni per urto con le molecole del gas che veniva immesso nelle immediate vicinanze. Naturalmente era necessario che la pressione gassosa (che era la stessa in tutta la macchina) fosse abbastanza alta per fornire un'intensità ragionevole, ma non tanto da causare lo sparpagliamento, per urto, del fascetto: si ottenevano perciò solo intensità ioniche molto modeste.

Per ovviare a questo inconveniente sono state costruite delle sorgenti all'interno delle quali la pressione potesse essere superiore alla pressione nella macchina. Per la presenza del campo alternato tra le D non si possono usare sorgenti ad alta tensione; quindi le sorgenti per ciclotroni sono a bassa tensione (arco) o ad elettroni oscillanti.

Il più semplice tipo di sorgente ad arco è quello indicato in fig. 71a, analoga a quella di fig. 10 (f filamento, A anodo), con la differenza che il foro di uscita degli ioni può

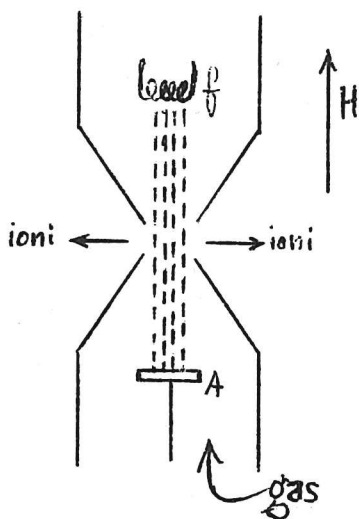


Fig. 71a

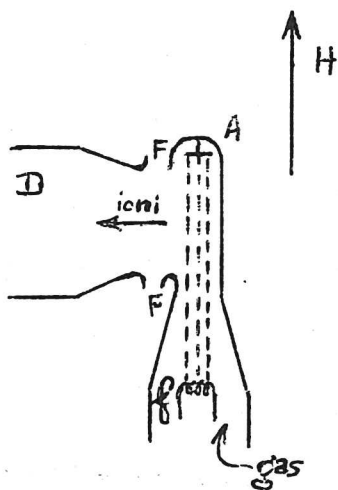


Fig. 71b

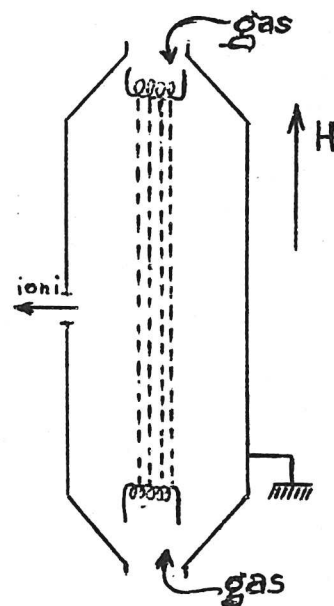


Fig. 71c

essere reso più grande (così da ottenere maggiore intensità), poichè l'effetto del campo magnetico, già descritto, limita lo sparpagliamento del fascetto elettronico. Esce anche una maggiore quantità di gas, che però non porta inconvenienti se si dispone di un efficace pompaggio differenziale.

Nella sorgente ora descritta gli ioni escono in tutte le direzioni. Si può pensare di modificarla (fig. 71b) in modo che, a parità di superficie dell'apertura di uscita, gli ioni escano nella direzione più opportuna per l'accelerazione. L'arco si forma nell'anodo cilindrico A che presenta una sottile fenditura verticale FF. Inoltre le D sono sagomate in modo da focalizzare gli ioni prodotti. Questo tipo di sorgente è detta "hooded arc".

Per quanto riguarda le sorgenti ad elettroni oscillanti, esse (v. fig. 71c) funzionano sostanzialmente nello stesso modo di quelle già descritte nel § I-10 (fig. 12). Il campo magnetico ivi indicato è in questo caso lo stesso campo del ciclotrone. La sorgente di fig. 71c è detta "di tipo PIG", (Philips Ionization Gauge).

In generale le sorgenti moderne forniscono da 10 a 100 mA di corrente ionica, con una dissipazione di circa 0,5 KW. La tensione dell'arco è generalmente compresa tra 100 e 200 V, con una corrente di qualche Ampère.

Il problema principale di queste sorgenti è la breve vita del filamento (da 20 a 100 ore per filamenti di tungsteno), il quale deve essere facilmente sostituibile. Inoltre la sorgente deve essere raffreddata, a causa del calore prodotto nella scarica.

CAPITOLO VIII

GLI ACCELERATORI LINEARI

§ VIII-1. Introduzione

Nel presente capitolo tratteremo un po' più estesamente l'argomento degli acceleratori lineari, il cui principio è stato esposto sommariamente nel § I-5. Lo schema di acceleratore lineare (a.l.) descritto in tale paragrafo fu effettivamente il primo tipo di a.l. realizzato: esso risulta evidentemente tanto più lungo quanto più alta è l'energia finale delle particelle, quanto più piccola è la loro massa e quanto più bassa è la frequenza usata. Perciò con esso si accelerarono dapprima solo ioni pesanti (Hg) ad energie dell'ordine del MeV. Solo nel 1946, utilizzando la tecnica delle altissime frequenze (onde decimetriche) e dei generatori pulsati (capaci quindi di alte intensità istantanee) sviluppata durante la guerra per il radar, si poté applicare tale principio per costruire (presso l'Università di California, Berkeley) un acceleratore per protoni da 32 MeV, che fu detto Linac. (Alcuni dati relativi a questa macchina saranno riportati nel § VIII-2.). Altri acceleratori lineari per protoni sono stati costruiti in seguito.

Per accelerare elettroni con lo stesso metodo senza arrivare a lunghezze proibitive occorrono naturalmente frequenze più alte (onde centimetriche). Accade però che a tali frequenze non è più possibile usare una struttura analoga a quella di fig. 2, in cui la tensione è trasmessa agli elettrodi mediante fili, perchè a frequenze così elevate diviene predominante la trasmissione per capacità; inoltre l'energia trasmessa ai cilindri sarebbe in gran parte irradiata. Perciò gli acceleratori lineari per elettroni, pur essendo fondati sullo stesso principio degli a.l.

per ioni, hanno uno schema costruttivo diverso, che ora descriveremo e che poi confronteremo con quello del § I-5 per mostrarne la sostanziale analogia.

In luogo della successione di elettrodi cilindrici vi è un unico cilindro suddiviso da una serie di diaframmi forati (fig. 72). Esso costituisce una "guida d'onda" nella quale vengono eccitate delle oscillazioni elettromagnetiche prodotte da uno o più klystron ed immesse ad una estremità della guida. Alla stessa estremità vengono immessi gli elettroni (già portati, mediante un altro acceleratore, ad energie di qualche MeV e quindi velocità prossime a c). Essi percorrono l'asse della guida e vengono a trovarsi costantemente in un campo elettrico diretto in modo da accelerarli.

Per collegare concettualmente il principio di questa macchina a quello descritto nel § I-5, si immagini dapprima che i fori dei diaframmi siano abbastanza stretti così da delimitare una serie di cavità cilindriche quasi chiuse. In ognuna di queste le linee di forza del campo elettrico hanno l'andamento indicato in fig. 72, così che esse si comportano come le successive intercapedini dell'acceleratore di fig. 2. I fori dei diaframmi servono

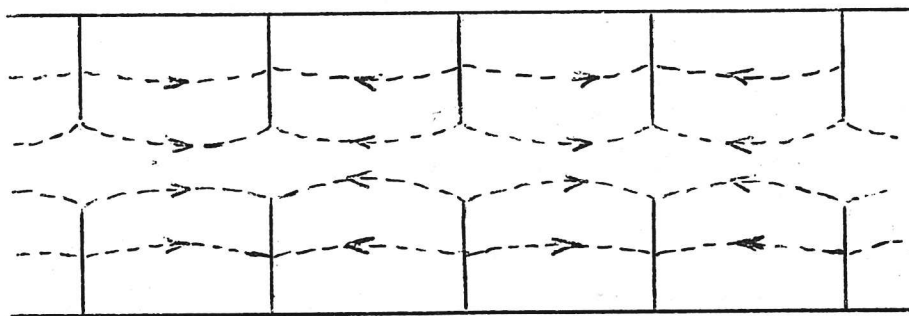


Fig. 72.

no, oltre che a permettere il passaggio degli elettroni, anche a stabilire un accoppiamento elettromagnetico tra le successive cavità, cosicchè, eccitata la prima, vengono automaticamente eccitate le successive e viene mantenuta tra di esse l'opportuna differenza di fase.

In pratica i fori dei diaframmi sono abbastanza larghi, perchè l'accoppiamento tra le varie "cavità" sia forte. Nella guida d'onda che ne risulta si possono stabilire onde stazionarie, nel cui campo elettrico oscillante le particelle vengono accelerate con lo stesso meccanismo già descritto per gli acceleratori a cilindri. Un altro modo di utilizzare tale guida d'onda è di trasmettere in essa un'onda progressiva che si propaghi con la stessa velocità delle particelle da accelerare, cosicchè queste possano "viaggiare" sulla cresta dell'onda, venendo accelerate con continuità.

Poichè, a parità di energia, gli ioni hanno una velocità molto inferiore che gli elettroni, e poichè gli acceleratori ad onda progressiva possono essere utilizzati in pratica solo per particelle ultrarelativistiche (la velocità di propagazione in una guida d'onda è sempre prossima a c), ne segue che questi acceleratori sono utilizzati solo per elettroni. Invece gli acceleratori ad elettrodi tubulari, che in linea di principio possono accelerare sia ioni che elettroni, sono utilizzati soprattutto per ioni.

§ VIII-2. Acceleratori ad elettrodi cilindrici

Anche per questo tipo di acceleratori si può definire una fase φ delle particelle, e si dirà particella sincrona (p.s.) quella la cui fase φ_s resta costante nel tempo. Come si è visto nel § I-5, la p.s. incontra sempre la stessa d.d.p. acceleratrice nelle successive intercapedini.

Si trova, analogamente a quanto si è visto per il sincrotrone e per il ciclotrone, che la fase di una particella generica soddisfa un'equazione differenziale, detta equazione della fase. Dall'analisi di tale equazione si possono derivare le condizioni per le quali φ oscilla intorno a φ_s (stabilità di fase), e si trova (come si è ottenuto con considerazioni qualitative nel § I-5) che la p.s. deve incontrare il campo elettrico acceleratore in fase crescente nel tempo. Tuttavia, se è soddisfatta questa esigenza di stabilità di fase, si ha una defocalizzazione radiale: infatti le particelle attraversando le intercapedini tra due cilindri successivi sono soggette ad un effetto di "lente elettrostatica" analogo a quello che avviene tra le D del ciclotrone (cfr. § VII-2), con la differenza che nel caso degli a.l. il campo è crescente. Ne segue quindi che l'effetto defocalizzante nella seconda metà della lente elettrostatica può prevalere sull'effetto focalizzante nella prima metà (nonostante la maggiore velocità della particella). Chiusi

Per ovviare a questa instabilità trasversale si sono pensate varie soluzioni. Si può ricorrere

- a) a delle griglie (o lamine sottili) poste all'entrata dei tubi (v. fig. 73). Con questo accorgimento si modifica l'andamento delle linee di forza di \vec{E} , così da eliminare la componente radiale defocalizzante;
- b) all'inserzione di coppie di lenti magnetiche quadripolari (per la cui descrizione dettagliata si veda l'Appendice II).

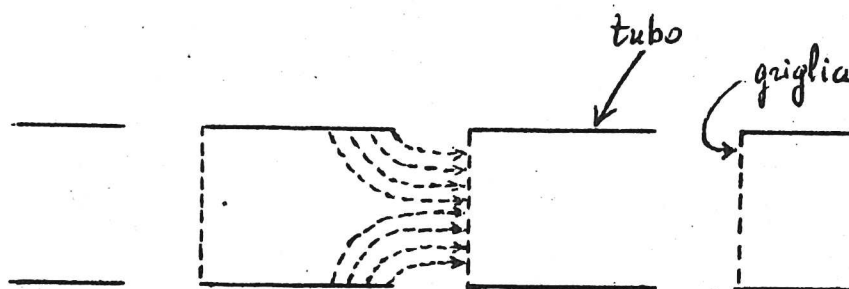


Fig. 73

Acceleratori lineari ed elettrodi cilindrici, come già detto, sono usati anche oggi per accelerare ioni. A titolo di esempio diamo nella tabella seguente alcuni dati relativi all'acceleratore lineare per protoni "Linac" dell'Università di California, Berkeley.

Lunghezza	12,2 m
Diametro	1 m
Numero di cilindri	47
Radiofrequenza	202,5 Mhz
Frequenza di ripetizione	30 impulsi/sec
Durata dell'impulso	600 μ sec
Energia di iniezione	4 MeV (Van de Graaff)
Energia massima	(31,8 \pm 0,1) MeV
Corrente media del fascio	0,25 μ A.
Numero di particelle/impulso	6 \cdot 10 ¹⁰

Fino a qui uncinato
di computer e' effetto
di fotolimitazione world.

§ VIII-3. Acceleratori a guida d'onda

L'andamento del campo elettrico (e magnetico) ad un dato istante in un acceleratore a guida d'onda è rappresentato in fig. 74.

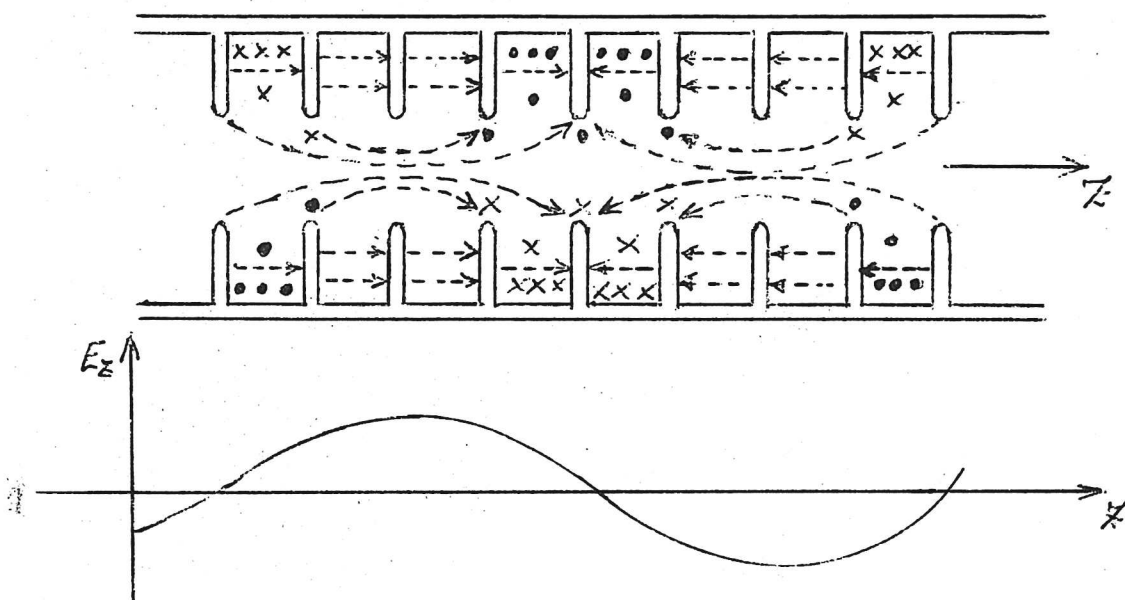


Fig. 74

Il diagramma rappresenta l'andamento di E_z sull'asse.

La figura 74 si può riferire sia al caso di onde stazionarie che di onde progressive. Nel primo caso si devono pensare i nodi di E_z fissi e l'ampiezza della sinusoide variabile armonicamente nel tempo; nel secondo caso si deve pensare tutto il profilo che si sposta nella direzione z con velocità V (velocità di fase dell'onda). Si noti che la distanza tra i setti deve essere scelta in modo che la semilunghezza d'onda nella guida sia un multiplo intero p di essa (in fig. 74 $p=4$).

Come è noto, un treno di onde stazionarie si può immaginare come la sovrapposizione di due treni di onde progressive che si propagano in verso opposto e con uguale velocità. Quindi le particelle che viaggiano in una guida a onde stazionarie

rie è come se fossero soggette all'azione simultanea di questi due treni di onde progressive, l'uno che si propaga nella direzione del loro moto, l'altro in senso opposto. Rispetto al primo treno, le particelle si trovano nelle medesime condizioni che nel caso della guida ad onda progressiva. Il secondo treno invece è visto dalle particelle come un campo a frequenza molto grande (per effetto Doppler), e quindi le particelle sono soggette ad una rapida successione di accelerazioni e decelerazioni, che in media ha effetto nullo. Nel presente paragrafo tratteremo quindi il caso degli acceleratori ad onda progressiva; tutte le conclusioni raggiunte si possono applicare agli acceleratori ad onde stazionarie.

Per comprendere la ragione della struttura a setti delle guide d'onda usate per l'accelerazione (fig. 74), diamo prima alcune informazioni sulle guide d'onda comuni (a pareti lisce) ^(*). Per esse valgono le due relazioni fondamentali

$$V v = c^2 \quad (\text{VIII.3.1})$$

$$\frac{V}{c} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (\text{VIII.3.2})$$

ove V è la velocità di fase e v è la velocità di gruppo ^(**) dell'onda, $\lambda = V/\gamma$ è la lunghezza d'onda entro la guida, $\lambda_0 = c/\gamma$ è la lunghezza d'onda nel vuoto, e λ_c è una lunghezza d'onda limite caratteristica della guida, che è dell'ordine di grandezza delle sue dimensioni trasversali e cresce con esse. Nella guida non possono propagarsi onde per cui sia $\lambda_0 > \lambda_c$, il che pone un limite inferiore alla frequenza che si può usare.

(*) Vedi per es.: H.R.L. LAMONT, Guide d'onda (Editrice Universitaria, Firenze).

(**) Ricordiamo che questa è la velocità con cui si propagano i segnali trasmessi dall'onda e l'energia elettromagnetica trasportata dall'onda stessa.

Dalla (VIII.3.2), riportata in grafico in fig. 75, si vede che è sempre $V > c$. Quindi una guida d'onda di questo tipo non può essere usata per l'accelerazione, perchè in essa le particelle ritarderebbero continuamente rispetto al campo elettrico

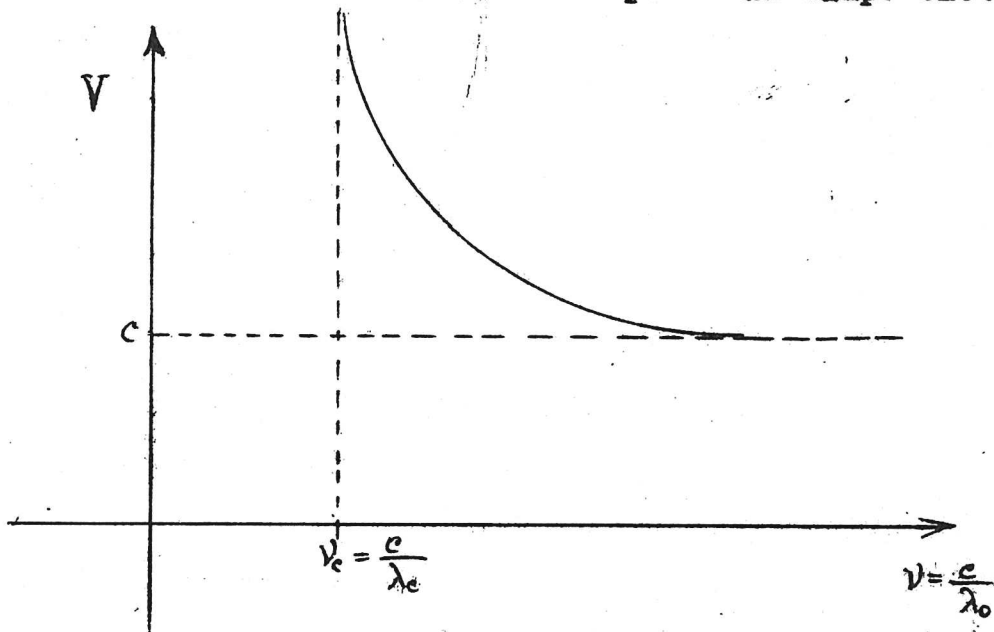


Fig. 75

dell'onda e non potrebbero essere accelerate. Inoltre la relazione (VIII.3.1) reca anch'essa disturbo: infatti, poichè si richiede $V \sim c$, in tal caso risulta $v \sim c$, e quindi l'energia elettromagnetica si propaga nella guida con elevata velocità, ed il generatore consuma una grande potenza.

Per poter accelerare le particelle con una guida d'onda bisogna, dunque, rinunciare alle guide comuni e cercare di realizzare uno schema in cui $V \lesssim c$ e V e v non soddisfino la (VIII.3.1), ma possano essere variate indipendentemente l'una dall'altra, almeno entro certi limiti.

Questo si può ottenere appunto inserendo in una comune guida d'onda cilindrica dei setti metallici forati, equidistanti (v. fig. 74). Variando la geometria dei setti si trova per V l'andamento mostrato in fig. 76, in cui le varie curve

corrispondono a diversi diametri del foro dei setti (crescenti da sinistra a destra). E' evidente che se il diametro del foro è grande (quasi uguale al diametro della guida) la curva si avvicinerà a quella di fig. 75 (indicata a tratteggio in fig. 76); se il diametro dei fori diventa molto piccolo in modo che ci si riduce

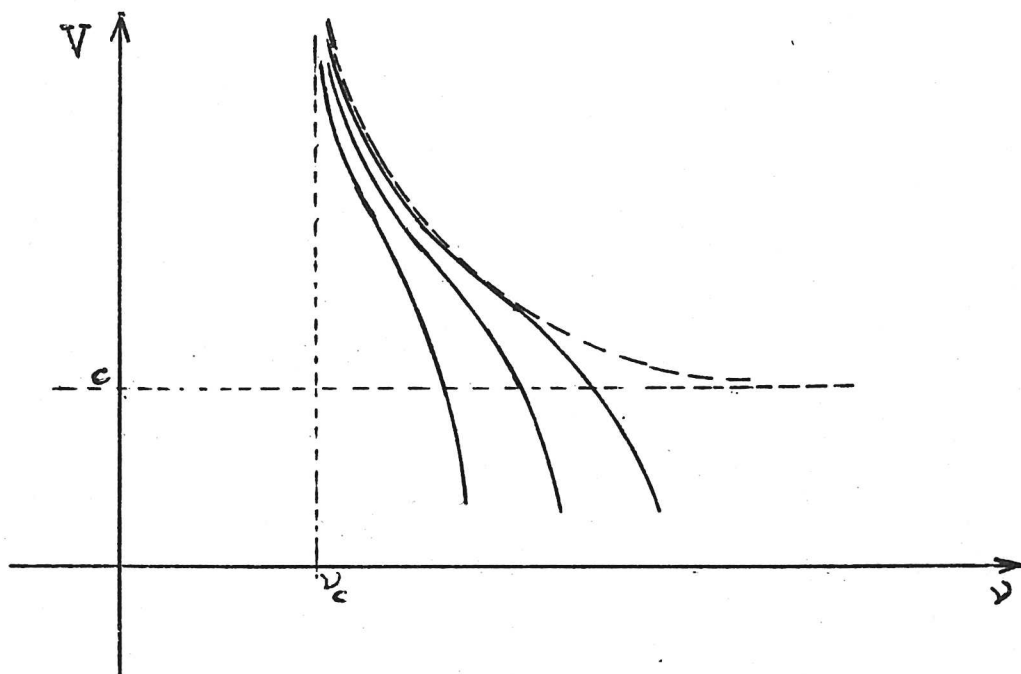


Fig. 76

praticamente a tante cavità separate, la curva tenderà alla retta verticale passante per ν_c (frequenza di risonanza delle cavità e V indeterminata) (*).

Per quanto riguarda la stabilità di fase negli acceleratori a guida d'onda, si arriva alle stesse conclusioni raggiunte nel § precedente: la stabilità di fase è assicurata per le particelle accelerate in fase di campo elettrico crescente

(*) A titolo d'informazione aggiungiamo che per una guida d'onda a forma cilindrica di diametro b , con fori circolari di diametro a , si trova che V dipende essenzialmente da $(b-a)$, e v da b/a . Si trova inoltre che lo spessore dei setti non ha importanza, purchè sia mantenuto sufficientemente piccolo ($\leq 20\%$ della distanza tra i setti).

nel tempo (cioè decrescente con z , v. fig. 77).

Anche in questo caso la stabilità longitudinale è accompagnata da instabilità trasversale. Questo si può vedere in modo generale così: se ci si pone in un sistema di riferimento che si muove con velocità V (accompagnando cioè la particella sincrona), in tale sistema la particella è in quiete e quindi risente solo l'effetto del campo elettrostatico. In questo campo

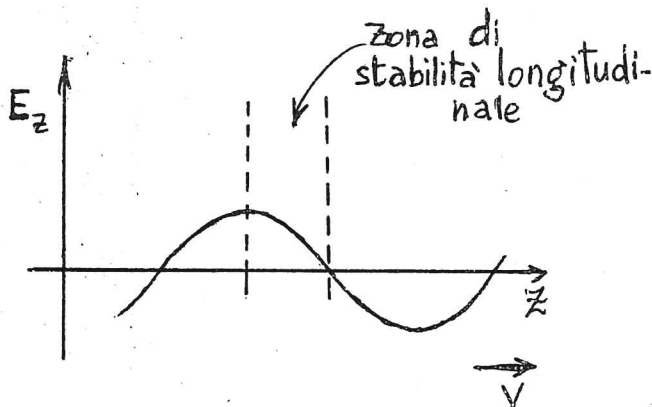


Fig. 77

non vi può essere una posizione di equilibrio stabile: infatti questa corrisponderebbe ad un minimo del potenziale, che invece, essendo una funzione armonica, non può avere nè massimi nè minimi se non al contorno. Perciò nelle semionde ove c'è stabilità longitudinale (cioè stabilità di fase)

vi è instabilità trasversale, e viceversa.

L'instabilità trasversale è però molto lieve, tranne che nel primo tratto dove si può correggere con una lente magnetica quadripolare.

Nella maggior parte degli a.l. a guida d'onda, per rendere il fascio più omogeneo in energia, la prima parte dell'acceleratore è sagomata in modo studiato opportunamente, così da provocare un rapido raggruppamento in pacchetti delle particelle intorno alla p.s.. Questo dispositivo di chiama "buncher": in esso le oscillazioni di fase sono molto ampie, ma decrescono rapidamente ed all'ingresso dell'acceleratore vero e proprio sono notevolmente ridotte.

Allo scopo di ottenere campi elettrici assai intensi senza che la potenza dissipata divenga proibitiva, tali macchine hanno un funzionamento pulsato a bassa frequenza (per es. 60 cicli/sec con impulsi dell'ordine del millisecondo o minore).

Diamo ora un esempio di realizzazione di un acceleratore lineare a guida d'onda: l'acceleratore ad onda progressiva da 630 MeV per elettroni "Mark III" presso l'Università di Stanford (California)^(*). Questo acceleratore, di lunghezza totale 67,1 m, consta di 21 sezioni cilindriche di 3,05 m ciascuna, a distanza di ~ 15 cm, la prima delle quali costituisce il "buncher".

Le altre sezioni sono divise in 5 sottosezioni uguali, ciascuna delle quali presenta lo schema costruttivo di fig. 74, e contiene 23 dischi metallici forati. Ogni sezione è alimentata da un klystron. Raccogliamo nella tabella seguente i dati più interessanti; il numero di cifre significative nelle caratteristiche geometriche della guida dà un'idea delle tolleranze richieste.

Lunghezza	67,1 m
Energia finale ^(**)	630 MeV ($\pm 2\%$)
Diametro interno	9,1440 cm
Diametro dei fori	2,0981 cm
Spaziatura dei dischi	2,625 cm
Spessore dei dischi	0,5842 cm
Radiofrequenza	2856 Mhz ($\lambda = 10,5$ cm)
Frequenza di ripetizione	60 impulsi/sec
Durata dell'impulso	{ teor. 1 μ sec prat. 0.3 μ sec

(*) Per maggiori dettagli v. CHODOROW et al., Rev. Scient. Instr. 26, 134 (1955).

(**) In questo acceleratore è possibile estrarre il fascio anche con l'energia di 250 e 330 MeV, mediante dispositivi deflettori intermedi disposti rispettivamente dopo 30,5 e 39,6 m

Energia d'iniezione	80 KeV
Velocità di gruppo v	0,01 c
Velocità di fase V	1,00 c
Corrente media del fascio	10 μ A
Numero di particelle per impulso	$\sim 10^{11}$
Potenza massima dei klystron	20 MW
Potenza di regime dei klystron	9 MW
Tensione di cresta	400 KV

L'uso di un acceleratore lineare, invece delle macchine circolari descritte nei capitoli precedenti, può essere vantaggioso o meno a seconda delle particolari caratteristiche richieste dalle necessità dell'esperienza. Le caratteristiche che possono far preferire gli acceleratori lineari sono la notevole intensità ottenibile, la facilità di estrazione del fascio, la possibilità di compiere esperimenti anche ad energie intermedie (v. nota nell'esempio precedente). Inoltre l'energia massima ottenibile in un a.l. non è praticamente limitata da perdite per radiazione. Infatti nel caso di elettroni il rapporto R tra energia perduta per irraggiamento ed energia guadagnata in uno stesso percorso è

$$R = \frac{2 E e r_0}{3 m c^2} \quad (\text{VIII.3.3})$$

ove E è il campo elettrico acceleratore e r_0 è il raggio classico dell'elettrone ($\approx 3 \cdot 10^{-13}$ cm). Si vede che, con gli ordini di grandezza solitamente usati, questo rapporto è piccolissimo ($\sim 10^{-13}$), e quindi l'energia raggiungibile con un a.l. non è limitata dalle perdite per irraggiamento.

CAPITOLO IX

RECENTI PROPOSTE DI NUOVI TIPI DI ACCELERATORI

§ IX-1. Introduzione

Negli ultimi anni sono state proposte diverse idee nuove per realizzare acceleratori di maggiore energia o di maggiore intensità rispetto a quelli descritti nei capitoli precedenti, senza aumentarne troppo il costo.

Alcune di queste idee sono allo stato di semplici proposte, altre di progetti ed altre in fase di sperimentazione. Esporremo in questo capitolo quelle proposte che presentemente sembrano offrire maggiori possibilità di sviluppo, e precisamente le seguenti:

- 1) Acceleratori FFAG (fixed field alternating gradient);
- 2) Acceleratori a fasci intersecantisi;
- 3) Acceleratori a fascio autofocalizzante.

Per maggiori dettagli e per un quadro più completo di questo argomento si possono consultare i Rendiconti del Symposium del CERN, 1956 (d'ora innanzi indicati con SC1956)^(*), e l'articolo di rassegna di JUDD già citato nel § VI-10 (nota).

(*) Proceedings of the CERN Symposium on High Energy Accelerators and Pion Physics (1956) - Vol. I.

§ IX-2. Acceleratori FFAG

In queste macchine si utilizza il principio del foccheggiamento forte ottenuto mediante una successione di settori a gradiente alternato, ove però il campo magnetico è costante nel tempo (fixed field). Esse possono essere:

- a) betatroni, in cui il campo guida è costante ma diviso in settori a G.A. e l'accelerazione è ottenuta per induzione da un campo magnetico alternato concatenato con l'orbita;
- b) ciclotroni, in cui si ha ancora accelerazione ottenuta con un campo elettrico a r.f., ed orbita a spirale con raggio partente da zero e velocità angolare costante;
- c) sincrotroni, in cui si ha accelerazione con cavità a r.f. ed orbita a spirale contenuta in una stretta corona circolare.

Il grande vantaggio di queste macchine è che, poichè si usa un campo magnetico costante, non vi sono perdite per isteresi e si possono raggiungere valori più elevati di B (fino a 2 wb/m^2). Per i ciclotroni l'uso del G.A. permette di mantenere costante la frequenza di rotazione (e quindi la r.f.) compensando l'aumento relativistico della massa con un aumento radiale del campo magnetico, senza perdere la stabilità verticale^(*). Si ottiene quindi una macchina comparabile con il sincrociclotrone in quanto ad energia, ma funzionante come un ciclotrone e quindi di intensità notevolmente superiore.

Anche nei sincrotroni FFAG si dovrebbero ottenere intensità medie molto più forti che nei sincrotroni a campo magnetico variabile (si spera per un fattore 1000). Infatti in questi ultimi la frequenza degli impulsi è quella del campo magnetico, che non può essere troppo elevata a causa dell'isteresi del ferro. Invece nei sincrotroni FFAG la frequenza degli impulsi è determinata dalla frequenza del ciclo di modulazione della r.f. che può essere resa molto maggiore.

(*) Nei ciclotroni ordinari non si può fare B della forma (IX.2.1) (crescente con r) poichè in tal caso si avrebbe $n < 0$ e quindi instabilità verticale.

Le macchine FFAG possono essere di due tipi:

- a) a settori radiali
- b) a settori spirali.

Riferiamoci per esempio ai sincrotroni. Nel caso a) il magnete anulare è costituito dalla successione di settori con il campo magnetico di segno alternato, del tipo

$$B_z = \pm B_0 (r/r_0)^k \quad (\text{IX.2.1})$$

ove k è positivo e grande (~ 100). I settori con campo positivo sono più lunghi di quelli con campo negativo, e la traiettoria è quindi del tipo di quella indicata in fig. 78

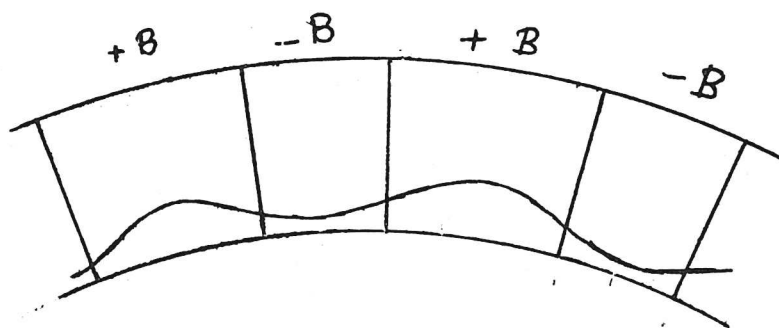


Fig. 78

dove la curvatura media è rivolta verso l'interno della macchina.

In una tale macchina, se le particelle sono iniettate nella parte interna della ciambella, esse quando sono accelerate tendono a spiralizzare verso l'esterno: dato però

l'alto valore dell'esponente k , l'orbita (prescindendo dalla sinuosità dovuta alle alternanze del segno di B_z) risulta una spirale molto fitta, la quale occupa una corona circolare abbastanza stretta rispetto al raggio della macchina.

La presenza dei settori a campo magnetico negativo è necessaria per assicurare la stabilità verticale del fascio; essi non possono essere heppure resi troppo piccoli. Di conseguenza il raggio della macchina, a parità di energia, risulta maggiore (circa triplo) che nei sincrotroni ordinari. Inoltre, per quanto si è detto, la ciambella deve essere molto più larga.

A tutt'ora (1958) macchine di questo tipo non sono state ancora realizzate. E' stato però costruito un modello di betatrone FFAG a settori radiali presso l'Università del Michigan (v. SC1956 pag. 359), con otto paia di settori in cui $k=3,36$; B va da 40 a 150 gauss, i raggi interno ed esterno della ciambella sono 32 e 54 cm, e gli elettroni sono accelerati a 400 KeV.

Nelle macchine a settori spirali (caso b) la superficie dei poli del magnete presenta una successione di solchi e rilievi disposti a spirale (fig. 79). Il loro profilo può essere di varie forme: per esempio a denti (fig. 80a) oppure sinusoidale (fig. 80b).

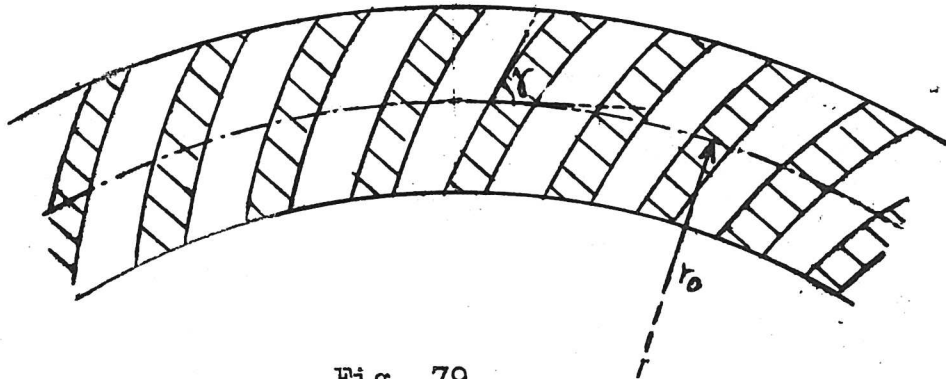


Fig. 79

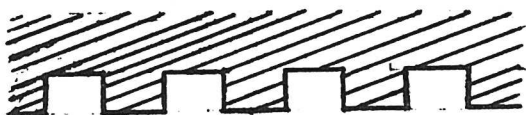


Fig. 80a

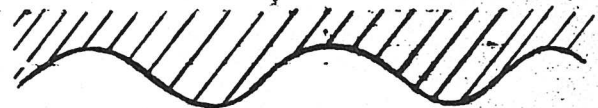


Fig. 80b

Il campo magnetico in media presenta un andamento crescente dall'interno verso l'esterno (del tipo (IX.2.1)) a cui sono sovrapposte delle fluttuazioni in senso sia radiale che azimutale, prodotte dalla forma dei poli del magnete. Tali fluttuazioni sono di piccola ampiezza in quanto le dimensioni di solchi e rilievi sono piccole rispetto alla larghezza del traferro del magnete^(*).

Nel caso del profilo sinusoidale si può ritenere B della forma

$$B = B_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^k \left[1 + f \cos N(\vartheta - \alpha \log \frac{r}{r_0}) \right] \quad (\text{IX.2.2})$$

ove f è la massima variazione percentuale del campo su un giro ($f \ll 1$), N è il numero di rilievi per giro, α è la cotangente dell'angolo (indicato con γ in fig. 79) tra la direzione dei solchi e la circonferenza di raggio r_0 .

Calcoliamo ora il gradiente n di questo campo, definito dalla (V.1.2). Dalla (IX.2.2) si ha

$$\log B = \text{cost} + k \log r + \log \left[1 + f \cos N(\vartheta - \alpha \log \frac{r}{r_0}) \right] \quad (\text{XI.2.3})$$

L'ultimo logaritmo si può sviluppare in serie, in quanto $f \ll 1$ e si ottiene

$$\log B \approx \text{cost} + k \log r + f \cos N(\vartheta - \alpha \log \frac{r}{r_0}) \quad (\text{IX.2.4})$$

Quindi

$$n = - \frac{\partial \log B}{\partial \log r} = -k - N \alpha f \sin N(\vartheta - \alpha \log \frac{r}{r_0}) \quad (\text{IX.2.5})$$

Si vede dunque che n varia sinusoidalmente intorno al valore $-k$, tra $-k - N \alpha f$ e $-k + N \alpha f$; se si fa $N \alpha f > k$, in certe zone è $n > 0$, in altre $n < 0$, in modo che si ottiene un gradiente alternato che assicuri la stabilità delle oscillazioni sia orizzontali che verticali.

(*) In alcuni progetti (cfr. KERST et al., Phys. Rev. 103, 1837 (1956)) si hanno invece dimensioni dei solchi comparabili con quelle del traferro. Ciò porta che f nell'equazione (IX.2.2) non è piccolo rispetto a 1, e la teoria delle oscillazioni diventa più complicata.

Questo tipo di macchina presenta sul tipo a settori radiali il vantaggio che le dimensioni sono inferiori (a parità di energia), ed anzi poco superiori a quelle di un sincrotrone ordinario. Infatti il raggio è aumentato rispetto a questo ultimo tipo soltanto di un fattore $1+f$.

Anche in questo tipo di macchina la ciambella è piuttosto larga. In un progetto di Kerst (SC 1956 pag.366) di un sincrotrone da 15 GeV, essa risulta larga 4 m su un raggio medio di 75,6 m.

Vi sono parecchie proposte riguardo ai dettagli costruttivi di una macchina a settori spirali; per esempio si è pensato di ricorrere ad alimentazioni separate per i singoli denti del profilo, così da poter disporre meglio dell'andamento spaziale del campo magnetico.

Un modello di betatrone FFAG a settori spirali è attualmente (1958) in costruzione presso l'Università dell'Illinois.

§ IX-3. Acceleratori a fasci intersecantisi

Ricordiamo che i fasci prodotti dalle macchine acceleratrici sono utilizzati per produrre reazioni nucleari nell'urto contro altre particelle. Le informazioni (per es. sezione d'urto) che si ottengono da queste reazioni, nonché la possibilità di creazione di nuove particelle, dipendono essenzialmente dalla energia del moto reciproco delle particelle che si urtano, cioè dall'energia complessiva misurata nel sistema di riferimento detto "sistema del baricentro" (s.b.), nel quale la quantità di moto totale è zero (★).

(★) Nella meccanica non relativistica si può definire tale sistema come un sistema di assi rigidamente collegato al baricentro delle masse (e di direzione invariabile): di qui il nome, usato anche in meccanica relativistica dove l'interpretazione è meno immediata.

Nel caso usuale di una particella che incide su una altra fissa nel sistema del laboratorio (s.l.), cioè su una particella del bersaglio, l'energia complessiva nel s.b. è inferiore all'energia nel s.l., che è quella a cui ci si è riferiti nella descrizione delle macchine.

Per ottenere energie più alte nel s.b. si è pensato (cfr. SC1956 pag. 36), anzichè di inviare un fascio contro un bersaglio fisso, di inviare piuttosto un fascio contro un altro fascio procedente in senso opposto. E' ovvio che in questo caso l'urto avverrà con energia complessiva molto maggiore, ma ciò che non è altrettanto evidente senza calcolo è che l'energia disponibile può essere assai maggiore di quella che risulterebbe dalla meccanica classica. Per semplicità tratteremo il caso in cui le due particelle interagenti siano uguali, con energia di riposo E_0 .

Per vedere i vantaggi di tale sistema, confrontiamo i due casi seguenti:

- a) le due particelle si urtano, muovendosi in verso opposto, entrambe con energia cinetica T nel s.l. (fasci intersecantisi);
- b) una particella di energia cinetica T' nel s.l. urta contro l'altra particella ferma (macchine ordinarie). Vediamo quale valore deve avere T' affinchè l'energia complessiva nel sistema del baricentro sia la stessa del caso a).

Nel caso a) il sistema del baricentro coincide evidentemente con il s.l. e quindi l'energia totale nel s.b. è $2(E_0 + T)$.

Nel caso b) un calcolo di meccanica relativistica mostra che l'energia totale nel s.b. è $2E_0 \sqrt{1 + \frac{T'}{2E_0}}$.

Deve essere allora

$$2E_0 \sqrt{1 + \frac{T'}{2E_0}} = 2(E_0 + T) \quad (\text{IX.3.1})$$

da cui

$$T' = 2T \left(\frac{T}{E_0} + 2 \right) \quad (\text{IX.3.2})$$

Si vede quindi che nel limite classico ($T \ll E_0$) $T' = 4T$ (*)
cioè si ha un "guadagno" di un fattore 4. Tale guadagno cresce
al crescere di T , e nel caso ultrarelativistico può raggiungere
cifre enormi. Per esempio, facendo collidere due fasci di elet-
troni ($E_0 \simeq 0,5$ MeV) da 200 MeV si ottiene nel s.b. un'energia
tale che, per realizzarla con una macchina ordinaria, sarebbe
necessario un fascio di energia $T' = 160$ GeV!

Il modo concettualmente più semplice per realizzare
questo principio è quello di disporre due macchine uguali, per
es. circolari, con le ciambelle tangenti l'una all'altra (o più
precisamente con un breve tratto in comune), in modo tale che
alla fine del percorso i due fasci vengano a collidere frontal-
mente. Si prestano particolarmente a questo scopo due sincrotro
ni FFAG spiralizzanti verso l'esterno.

Per comprendere tuttavia quali siano le difficoltà
che presenta la realizzazione pratica di queste macchine, si
deve tener presente che le interazioni nucleari che si studiano
ad alta energia hanno una probabilità di verificarsi (espressa
dalla sezione d'urto σ) piuttosto piccola, e quindi per produr-
re uno di tali eventi è necessario un gran numero di collisioni.

Nel caso delle macchine ordinarie il numero ν degli
eventi per unità di tempo è

$$\nu = \sigma \ell N n v A \quad (\text{IX.3.3})$$

ove ℓ è lo spessore del bersaglio, N il numero di "particelle
bersaglio" per unità di volume, n il numero di particelle per
unità di volume del fascio, v la loro velocità, A la sezione
del fascio.

Nel caso dei fasci incrociati si ha

$$\nu = \sigma n^2 \ell' v' A' \quad (\text{IX.3.4})$$

(*) Questo si vede immediatamente anche notando che in tal caso
 $T = \frac{1}{2} m v^2$ e la velocità relativa è doppia.

ove questa volta l' è la lunghezza del tratto comune dei due fasci, A' la sezione comune ai due fasci e v' la velocità delle particelle di un fascio nel sistema di riferimento dell'altro.

Se confrontiamo ora le (IX.3.3), (IX.3.4) notiamo che, mentre l, v, A non differiscono di molto (al massimo di uno o due ordini di grandezza) dai corrispondenti l', v', A' , invece con le intensità attualmente raggiunte $n \ll N$ (per un fattore $10^8 - 10^{10}$). Si vede quindi che, volendo studiare un certo evento, il numero di reazioni osservabili con i fasci incrociati è estremamente più piccolo che con le macchine ordinarie. Per poter rendere effettivamente utilizzabile la tecnica dei fasci intersecantisi bisogna aumentare notevolmente n , cioè in definitiva l'intensità del fascio.

Per ottenere ciò senza modificare profondamente le macchine esistenti è stato proposto (cfr. SC1956 pag. 64) di inviare le particelle accelerate da una macchina ordinaria in una ciambella dove trovano un campo guida che le mantiene su un'orbita circolare di raggio costante senza accelerarle ulteriormente. In questa ciambella, detta anello di accumulo, vengono progressivamente accumulate le particelle successivamente accelerate dalla macchina. In questo modo la densità del fascio nell'anello aumenta nel tempo fino a raggiungere certi limiti imposti dagli effetti di carica spaziale e dagli urti contro le molecole del gas residuo (*).

Gli anelli di accumulo inoltre permettono di realizzare i fasci intersecantisi usando una sola macchina ordinaria secondo lo schema di fig. 81. Qui un deflettore instrada alternativamente le particelle nell'uno o nell'altro di due anelli A_1, A_2 disposti tangenzialmente. Notiamo che, poichè gli anelli sono a campo fisso, essi possono avere un raggio inferiore che non la macchina, in quanto il campo può essere reso più alto.

(*) Per non rendere troppo severi i limiti dovuti a quest'ultima causa è necessario un vuoto di 10^{-9} mmHg.

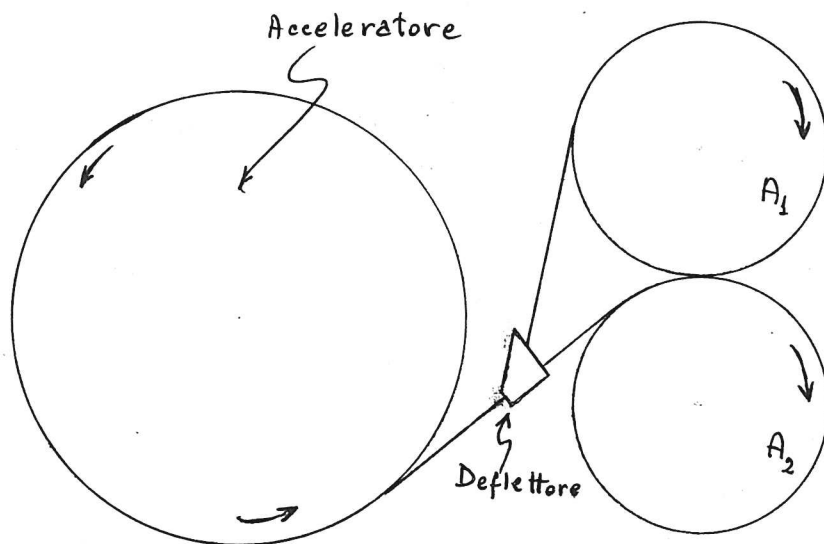


Fig. 81

D'altra parte la realizzazione di anelli di accumulo alimentati da una macchina circolare come in fig. 81 presenta delle gravi difficoltà pratiche in quanto una gran parte delle particelle va perduta durante l'estrazione dalla macchina. In

questo senso appare più conveniente alimentare gli anelli di accumulo con un acceleratore lineare. Esiste a questo proposito un progetto di Panofsky et al. di usare l'acceleratore lineare di Stanford da 500 MeV per riempire anelli di accumulo di 1 m di raggio fino ad ottenere una corrente di circa $1 \text{ A}^{(*)}$.

Abbiamo già visto che nelle macchine a fasci intersecantisi il s.b. coincide praticamente con il s.l.. Questo costituisce un ulteriore, notevole vantaggio dal punto di vista sperimentale, perchè i prodotti della reazione si distribuiscono in un angolo solido abbastanza ampio, mentre nelle macchine ordinarie ad alta energia, ove il baricentro delle particelle interagenti si muove praticamente con la velocità della luce, i prodotti della reazione sono emessi nel s.l. tutti in avanti in un cono molto stretto, il che rende più difficile la loro identificazione.

A tutt'ora (1958) è in costruzione presso il laboratorio del MURA un modello di acceleratore per elettroni a fasci intersecantisi che utilizza fasci di 50 A a 40 MeV.

(*) O'NEILL, BARBER, RICHTER and PANOFSKY: A proposed experiment on the limits of Quantum Electrodynamics (High Energy Physics Laboratory, Stanford University, Stanford (California),

2

§ IX-4. Acceleratori a fascio autofocalizzante

Negli acceleratori finora descritti le condizioni $\text{rot } \vec{B} = 0$, $\text{div } \vec{E} = 0$ (assenza di correnti e di cariche nella ciambella) pongono delle restrizioni abbastanza notevoli ai tipi di campi che possono essere usati per l'accelerazione.

Nella proposta dei cosiddetti acceleratori a fascio autofocalizzante (cfr. SC1956 pag. 68) tali condizioni sono abbandonate. Per comprendere il principio di funzionamento di queste macchine, si consideri la forza che si esercita fra due elettroni moventisi con la stessa velocità βc , su orbite parallele a distanza r (supposti i due elettroni sulla stessa perpendicolare alle orbite) (fig. 82). Essa si può ottenere facilmente con una trasformazione di Lorentz dal sistema di quiete (dove la forza è la sola repulsione elettrostatica) al sistema del laboratorio: ne risulta una forza repul-

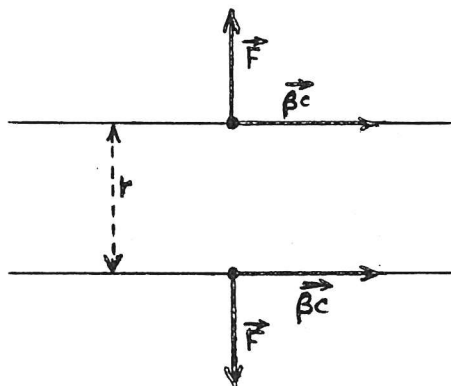


Fig. 82

siva $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2)$ (il primo termine è la repulsione elettrostatica, il secondo corrisponde all'attrazione elettrodinamica tra due correnti parallele). Quindi per $\beta \sim 1$ (elettroni relativistici) tale forza è molto minore che nel caso statico. Ora la repulsione elettrostatica può essere annullata mescolando al fascio di elettroni una uguale densità di ioni positivi: resta così solo il termine attrattivo che restringe il fascio fino a portarlo in condizioni di equilibrio. In questo modo il fascio diventa stabile ed estremamente sottile^(*): le sue dimensioni sono fissate dal

(*) L'idea di deboli fasci relativistici "autofocalizzanti" fu proposta da Bennett nel 1934.

l'equilibrio tra l'effetto defocalizzante dovuto agli urti tra particelle e l'effetto focalizzante elettromagnetico. All'interno del fascio gli elettroni compiono, per effetto degli urti, delle oscillazioni trasversali nelle quali irradiano una notevole quantità di energia, e questo irraggiamento ne smorza rapidamente l'ampiezza.

In condizioni di regime, tenendo conto degli effetti sopra riportati, si trova che la densità di corrente all'interno del fascio (a simmetria cilindrica) è data da

$$j(\rho) = j_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^2}{\rho^{*2}}\right)^2} \quad (\text{IX.4.1})$$

dove ρ è la distanza dall'asse del fascio, $j_0 = j(0)$ è la densità massima e ρ^* è una costante che dà una misura del raggio medio del fascio. Infatti calcolando l'intensità I della corrente nella colonna si ha

$$I = \int_0^{\infty} j(\rho) 2\pi\rho d\rho = \pi\rho^{*2} j_0 \quad (\text{IX.4.2})$$

come si otterrebbe se la colonna avesse densità di corrente j_0 uniforme per $\rho \leq \rho^*$ e nulla per $\rho > \rho^*$. In realtà entro un cilindro di raggio ρ^* fluisce una corrente $\frac{1}{2}I$.

Il campo magnetico $B(\rho)$ prodotto da questa distribuzione di corrente è dato, per il teorema della circuitazione, da

$$B 2\pi\rho = \mu_0 \int_0^{\rho} j(\rho') 2\pi\rho' d\rho' \quad (\text{IX.4.3})$$

da cui, tenendo presente le (IX.4.1), (IX.4.2), si ha

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{\rho^2 + \rho^{*2}} \quad (\text{IX.4.4})$$

Si vede quindi che $B(\rho)$ ha un massimo per $\rho = \rho^*$ corrispondente al valore $\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho^*}$.

Per utilizzare in un acceleratore le proprietà di un fascio autofocalizzante, è stato proposto (Budker, SC1956 pag. 68) di far percorrere a tale fascio un'orbita circolare per mezzo di

un campo magnetico esterno (relativamente basso) e di utilizzare il campo magnetico prodotto dal fascio secondo (IX.4.4) quale campo guida per un fascio di ioni giranti in senso opposto entro la sezione stessa del fascio elettronico. Questo campo guida ha infatti la proprietà di essere assai intenso e fortemente focalizzante in senso sia orizzontale che verticale, anche se la zona ove si muovono gli ioni è molto stretta. Infatti partendo dalle (IV.3.4), si ricavano le seguenti espressioni generali per le frequenze delle oscillazioni orizzontali e verticali:

$$\omega_r^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{r}{B_z} \frac{dB_z}{dr} \right) = \omega^2 (1 - n) \quad (\text{IX.4.5})$$

$$\omega_z^2 = -\omega^2 \frac{r}{B_z} \frac{dB_r}{dz} \quad (\text{IX.4.6})$$

ove con r si indica, come al solito, la distanza dall'asse della macchina. Si ha ovviamente $g = |R - r|$, se R è la distanza dall'asse della macchina del centro del fascio.

Nelle macchine fin qui considerate era $\text{rot } \vec{B} = 0$ e (cfr. (IV.3.13)) la (IX.4.6) si trasformava in

$$\omega_z^2 = \omega^2 n \quad (\text{IX.4.7})$$

Nel caso ora in considerazione invece si ha $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, da cui prendendo la componente ϑ (lungo la direzione del fascio di elettroni) si ha

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\mu_0 j \quad (\text{IX.4.8})$$

Dalle (IX.4.6), (IX.4.9) segue

$$\omega_z^2 = \omega^2 \left(n + \frac{R}{B_z} \mu_0 j \right) \quad (\text{IX.4.9})$$

ove si è posto $r = R$, in quanto le dimensioni del fascio sono molto più piccole di R .

Calcolando n con la (IX.4.4) si ha

$$n = - \frac{R}{\rho} \left(\frac{\rho^{*2} - \rho^2}{\rho^{*2} + \rho^2} \right) \quad (\text{IX.4.10})$$

Si vede quindi che per $\rho < \rho^*$ (cioè nella zona in cui si accelerano le particelle) n è negativo e grande. La (IX.4.5) garantisce quindi la stabilità delle oscillazioni orizzontali. Per quanto riguarda le oscillazioni verticali si ha ancora stabilità poichè sostituendo nella (IX.4.9) le (IX.4.1), (IX.4.4) e (IX.4.10) si ha

$$\omega_x^2 = \omega^2 \frac{R}{\rho} \quad (\text{IX.4.11})$$

Per realizzare una tale macchina si pensa di iniettare in una ciambella una corrente elettronica piuttosto intensa (~ 1000 A). Gli ioni, sempre presenti con gli attuali vuoti ($10^{-5} - 10^{-6}$ mmHg) vengono attratti dal fascetto fino ad annullare la carica spaziale. Per dare un'idea delle prestazioni che si potrebbero ottenere diamo un esempio numerico.

Supponendo di avere una corrente di elettroni da 15 MeV, di 1000 A, si trova che per mantenerli su un'orbita di raggio uguale a 5 m è sufficiente un campo magnetico esterno di 100 gauss (10^{-2} wb/m²). Disponendo di un campo elettrico acceleratore di 1 V/cm si trova che $\rho^* = 0,02$ mm e quindi $B_{\max} = 5$ wb/m². Questo campo permette di deflettere lungo il fascio protoni da ~ 7 GeV.

Si vede quindi che basterebbero modesti campi magnetici esterni e dimensioni non eccessive per ottenere elevatissime energie.

Nonostante i grandi vantaggi che presenterebbe una macchina basata sul principio dei fasci autofocalizzanti, restano ancora incerti alcuni punti fondamentali, relativi alla realizzazione pratica di queste macchine. La difficoltà principale consiste nel modo di stabilire la forte corrente elettronica necessaria.

Un altro problema aperto riguarda il sistema di accelerare gli ioni senza che il dispositivo di accelerazione perturbi sensibilmente il moto del fascio elettronico. Un sistema suggerito a questo scopo è di usare per l'accelerazione degli ioni un sistema di due cavità risonanti sfasate di $\frac{\pi}{2}$ e disposte come in fig. 83 , in modo tale che le particelle positive,

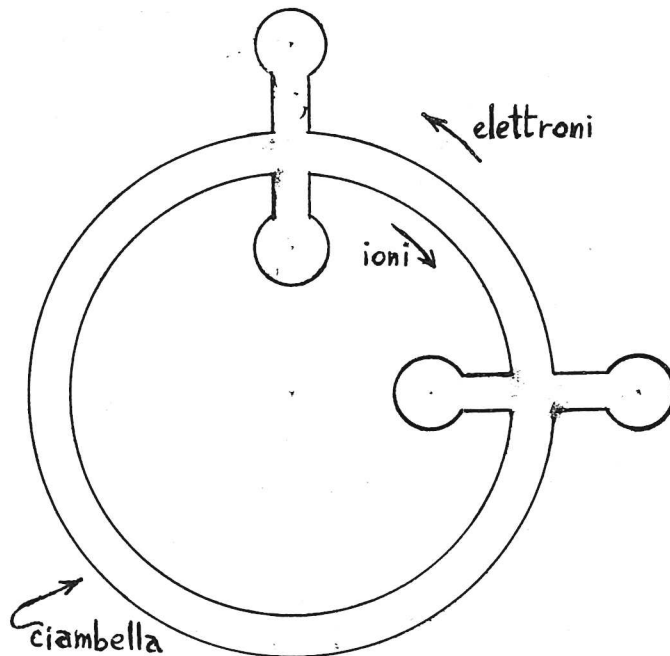


Fig. 83

che procedono in un senso, vengano accelerate due volte, mentre le particelle negative, che viaggiano in senso contrario, ricevano impulsi uguali ed opposti e quindi un effetto complessivo nullo. Tuttavia questo sistema presenta notevoli difficoltà pratiche.

Esperienze preliminari per la realizzazione di fasci autofocalizzanti, compiute nell'U.R.S.S. (cfr. SC1956 pag. 76) hanno permesso di realizzare fasci elettronici di 10 A con un'energia di 3 MeV. Anche altri gruppi studiano ora progetti con fasci autofocalizzanti, nonostante le notevoli difficoltà che presenta la loro realizzazione pratica.

APPENDICE I

IL SINCROTRONE DELLA AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY

Nel 1953 è stata iniziata a Canberra, presso la Australian National University, la costruzione di un tipo di sincrotrone per protoni, il cui principio di funzionamento è quello di un normale sincrotrone, ma la cui realizzazione pratica presenta caratteristiche del tutto nuove.

L'energia per cui è progettato questo sincrotrone è di 10,6 GeV. Per ragioni economiche si è voluto però che le dimensioni non fossero troppo grandi. Questo implica l'uso di un campo magnetico molto intenso che non può essere realizzato con magneti a nucleo di ferro, perchè questi entrano in saturazione per $B \approx 2 \text{ wb/m}^2$. Invece la macchina progettata ha un raggio di 4,8 m e richiede un campo massimo di 8 wb/m^2 .

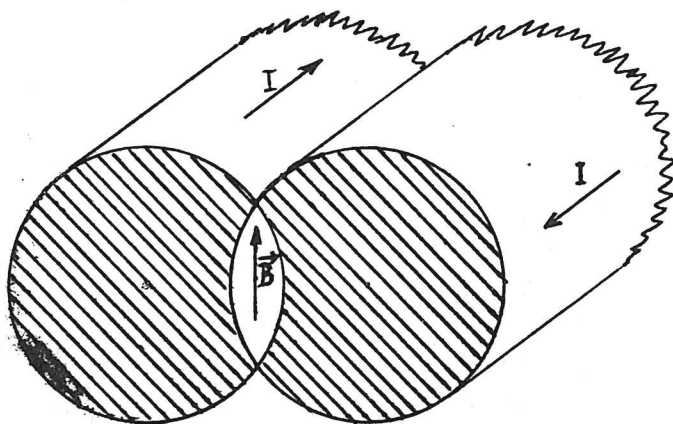


Fig. 84

Per realizzare tale campo si utilizza un magnete senza ferro fondato sul seguente principio:

Se si considerano due conduttori cilindrici paralleli percorsi da correnti uguali ed opposte, e si immagina che essi abbiano una parte in comune (v. fig. 84 ove è rappresentata una loro se-

zione normale), si vede che nella zona centrale ove la corrente è nulla esiste un campo magnetico uniforme \vec{B} . Tale zona quindi può essere lasciata libera dal conduttore ed in essa si può met

tere la ciambella. Per ottenere un campo di 8 wb/m^2 è necessaria una corrente di $1,6 \cdot 10^6 \text{ A}$; questa corrente enorme è prodotta da un generatore unipolare che utilizza il campo magnetico di un ciclotrone già esistente. Il rotore del generatore viene fatto ruotare da un motore fino a raggiungere la velocità angolare di 15 giri al secondo ed immagazzinare l'energia di $5 \cdot 10^8$ joule; per raggiungere questo stato è necessario un tempo di 10 minuti. I contatti tra il rotore ed il circuito sono realizzati mediante getti di metallo liquido (lega di Na e K al 50%, con temperatura di fusione di 11°C).

I conduttori di fig. 84 sono in effetti costituiti da un gran numero di sbarre di rame legate saldamente insieme per resistere alle sollecitazioni meccaniche dovute alle forze elettromagnetiche repulsive. Quando si chiude il circuito del magnete, la corrente sale con un tempo di salita di 0,8 sec (che è quello utilizzato per l'accelerazione) ed ha un andamento sinusoidale smorzato.

L'iniezione è realizzata con un ciclotrone da 8 MeV.

Con questa macchina si spera di ottenere, pur con mezzi economici relativamente modesti, alte energie ed elevate intensità. Il principale svantaggio resta la bassa frequenza di ripetizione (6 impulsi per ora).

APPENDICE II

LENTI MAGNETICHE QUADRIPOLARI

Una lente magnetica è un dispositivo che, per mezzo di un campo magnetico, agisce su un fascio di particelle in modo analogo ad una lente ottica su un fascio luminoso: cioè ne varia la convergenza senza deviarne la direzione principale.

Da molto tempo si usano in vari apparecchi (per es. microscopio elettronico) lenti magnetiche caratterizzate da un campo magnetico a simmetria assiale ed avente linee di forza prevalentemente parallele all'asse. Tali lenti (sempre convergenti) hanno una distanza focale proporzionale (in prima approssimazione) all'energia cinetica delle particelle. Nel caso di particelle di grande energia, come quelle delle macchine acceleratrici, la distanza focale di tali lenti, coi campi praticamente realizzabili, è così grande che esse sono praticamente inutilizzabili.

Nel 1952 è stato però proposto da Courant, Livingston e Snyder^(*) un nuovo tipo di lente magnetica, in cui il campo magnetico è trasversale rispetto al fascio, e quindi, a pari intensità, produce un effetto focalizzante molto maggiore: queste lenti sono quindi utilizzabili anche per particelle di grande energia, e trovano perciò largo impiego sia come parti costituenti di sincrotroni (nelle sezioni diritte) o di acceleratori lineari, sia come organi ausiliari per l'utilizzazione del fascio prodotto dall'acceleratore.

Il principio di funzionamento di tali lenti è lo stesso che è utilizzato nei sincrotroni a gradiente alternato (e di fatti esse sono state proposte nella stessa nota del G.A.) e si può brevemente spiegare come segue: in una lente si realizza un campo magnetico trasversale avente azione fortemente focalizzante in senso per es. orizzontale e quindi defocalizzante in senso

(*) COURANT, LIVINGSTON e SNYDER: Phys. Rev. 88, 1190 (1952), già citata nel § VI-1.

verticale; a questa si accoppia un'altra lente fortemente focaliz-
zante in senso verticale e defocalizzante in senso orizzontale.
L'effetto complessivo della coppia, come dimostreremo, è focaliz-
zante in entrambe le direzioni.

Per trattare più dettagliatamente il funzionamento di
una lente magnetica introduciamo nella regione della lente un
sistema di coordinate cartesiane s, x, z , in cui l'asse s coincide
con la traiettoria imperturbata (rettilinea), l'asse x è orienta-
to nella direzione orizzontale e l'asse z nella direzione verti-
cale.

Ricordiamo che l'induzione magnetica \vec{B} nelle regioni
prive di correnti (e di campi elettrici rapidamente variabili)
può essere ricavata come gradiente di un "potenziale magnetico"
 V . Infatti in tali regioni è

$$\text{rot}\vec{B} = 0 \qquad \text{div}\vec{B} = 0 \qquad (\text{AII.1})$$

Per la prima di queste, si può porre $\vec{B} = \text{grad}V$. E per la seconda
 V deve soddisfare l'equazione di Laplace.

$$\Delta^2 V = 0 \qquad (\text{AII.2})$$

La più semplice lente magnetica del tipo descritto è
la lente quadripolare lineare, in cui il potenziale $V(s; x; z)$ si
sceglie della forma

$$V(s, x, z) = f(s)xz \qquad (\text{AII.3})$$

e si prendono in considerazione piccoli scostamenti dall'orbita
imperturbata, in modo da restare in una zona dello spazio in cui
i termini di secondo ordine in x e z siano trascurabili. In
questa approssimazione la (AII.3) soddisfa la (AII.2), e la com-
ponente $B_s = \frac{\delta V}{\delta s} = 0$. Inoltre si ha

$$B_x = \frac{\delta V}{\delta x} = f(s)z \quad ; \quad B_z = \frac{\delta V}{\delta z} = f(s)x \qquad (\text{AII.4})$$

Le equazioni del moto (sotto l'azione della sola forza di Lorentz) sono

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= 0 \\ m\ddot{x} &= qvB_z \\ m\ddot{z} &= -qvB_x \end{aligned} \quad (\text{AII.5})$$

ove con v si è indicata la componente s della velocità delle particelle, che praticamente coincide con l'intera velocità. Sostituendo le (AII.4) nelle (AII.5) si ottiene

$$m\ddot{x} = qv f(s) x \quad (\text{AII.6})$$

$$m\ddot{z} = -qv f(s) z \quad (\text{AII.7})$$

Si vede quindi che la particella è soggetta in una delle due direzioni x o z ad una forza di richiamo, nell'altra ad una forza di allontanamento, entrambi lineari nello scostamento (da cui il nome di lente lineare).

Dalla (AII.3) si vede che nei piani $s=\text{cost}$ le linee equipotenziali sono iperboli equilateri. D'altra parte le superfici libere del magnete generatore del campo devono essere equipotenziali. Esse dovranno quindi avere sezione a forma di iperbole equilatera, e di solito si scelgono come in fig.85, ove con N , S si indicano le polarità nord e sud dei poli corrispondenti ad una scelta di valori di $V(s,x,z) = \pm V_0$, uguali ed opposti.

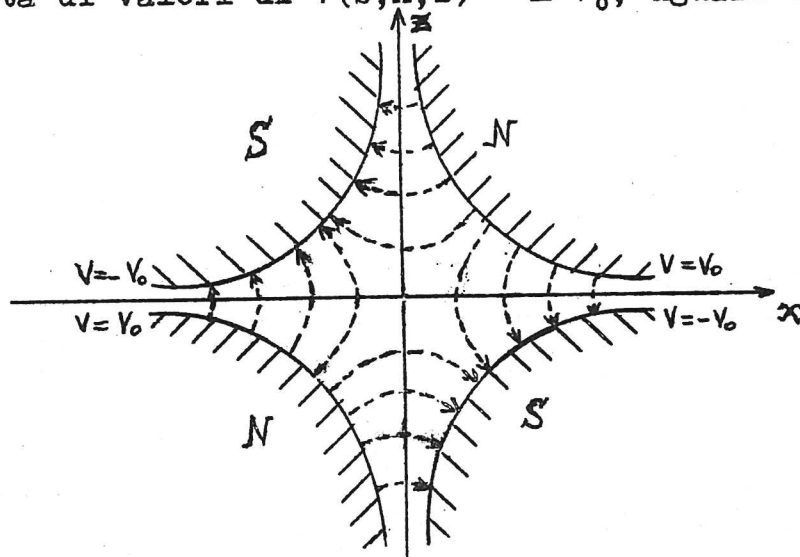


Fig. 85

Le linee tratteggiate sono linee di forza di B.

Si vede che la lente risulta a quattro poli (da cui il nome di lente quadripolare). Lenti più complicate, non lineari, si ottengono con un numero superiore di poli (per es. 6 o 8).

In pratica la sezione di una lente quadripolare si presenta come in fig. 86. Le bobine di alimentazione sono in serie ma avvolte in senso opposto nei poli N e S. Generalmente le iperboli del profilo dei magneti si approssimano con dei cerchi.

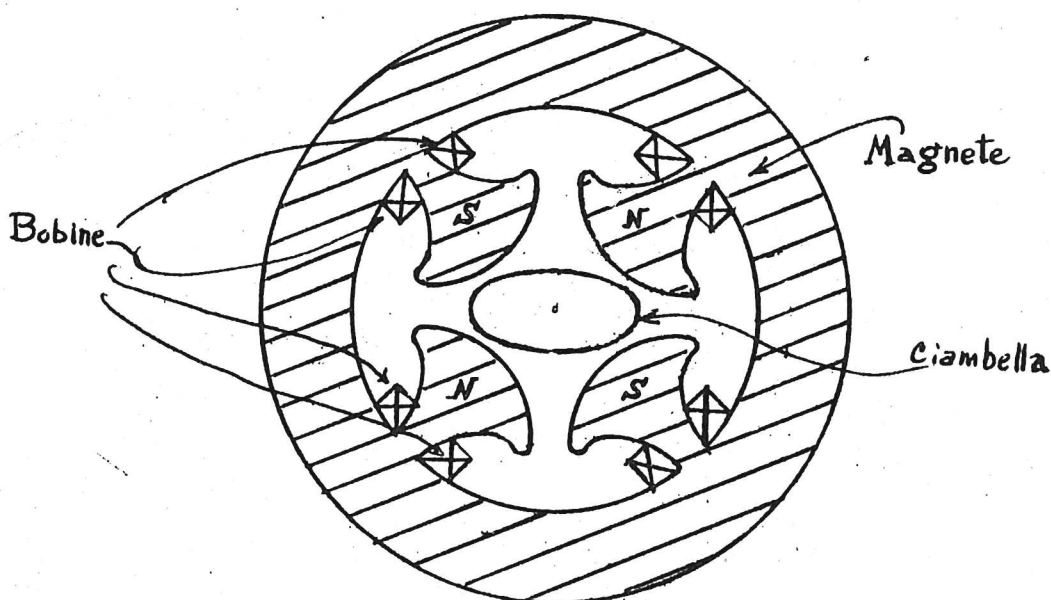


Fig. 86

La forma più conveniente per la funzione $f(s)$ sarebbe una costante p all'interno della lente e zero fuori. Per gli effetti ai bordi ciò non è realizzabile esattamente,

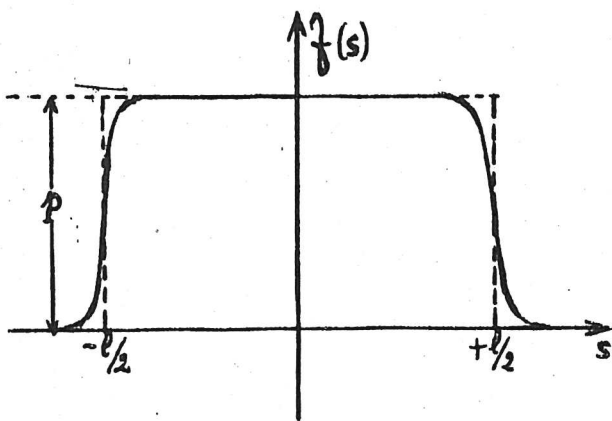


Fig. 87

realizzabile esattamente, e $f(s)$ risulta una funzione del tipo indicato in fig. 87, che si determina sperimentalmente in vasca elettrolitica. Per i calcoli la si approssima con una funzione rettangolare (tratteggiata in fig. 87)

della stessa area e di altezza p . Si definisce così la lunghezza l della lente.

Come già detto, un sistema focalizzante completo consiste sempre di due delle lenti descritte, ruotate attorno all'asse s di 90° : in questo modo si esercitano due azioni consecutive, una focalizzante ed una defocalizzante, in entrambe le direzioni x e z . Mostriamo ora che l'effetto complessivo è focalizzante. A tale scopo facciamo vedere che esiste un'analogia tra la traiettoria di una particella che attraversa una lente magnetica ed il percorso di un raggio di luce attraverso una comune lente.

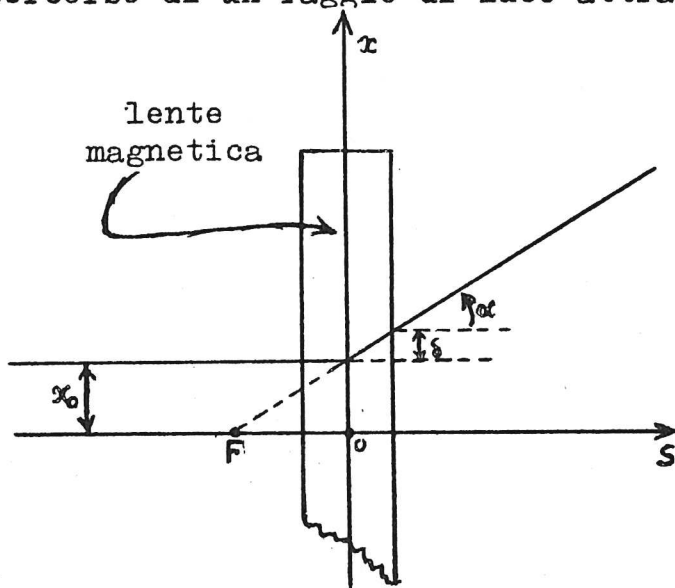


Fig. 88

Se consideriamo una particella che entra nella lente magnetica parallelamente all'asse s , la sua traiettoria all'uscita risulterà spostata, per es. nella direzione x , di una quantità δ e deviata di un angolo α verso l'asse s o verso l'esterno (fig. 88).

Si può dimostrare che α è proporzionale a l e δ è

proporzionale a l^2 . Se l è abbastanza piccolo ("lente sottile") si può trascurare δ e, come ora dimostriamo, la direzione della traiettoria uscente interseca sempre l'asse s nello stesso punto F , qualunque sia la distanza x_0 della particella incidente dall'asse. La distanza con segno $OF = f$ è detta "distanza focale" della lente magnetica per l'analogia con le leggi comuni dell'ottica geometrica.

Indicando con l'apice la derivazione rispetto a s , all'ingresso ($s = -l/2$) si ha $x = x_0$, $x' = 0$; all'uscita ($s = +l/2$) si ha ancora $x = x_0$, ma $x' = \text{tg } \alpha$. Dall'equazione del moto (AII.6)

si ha ^(*)

$$\ddot{x} = \frac{qv}{m} p x \quad (\text{AII.8})$$

e moltiplicando per $1/v^2$ ($x'' = \ddot{x}/v^2$ perchè si ha $s=vt$ con $v=\text{cost.}$)

$$x'' = \frac{q}{mv} p x \quad (\text{AII.9})$$

e

$$\text{tg } \alpha = x'(\frac{l}{2}) = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'' ds = \frac{q}{mv} p \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x ds = \frac{q}{mv} p x_0 l \quad (\text{AII.10})$$

in quanto entro la lente $x \approx \text{cost} = x_0$.

Essendo $f = -x_0/\text{tg } \alpha$ (v. fig. 88) risulta

$$f = - \frac{mv}{qpl} \quad (\text{AII.11})$$

indipendente da x_0 , come si voleva dimostrare.

Notiamo che $f < 0$ corrisponde al caso di una lente divergente, quale quella di fig. 88 ^(**).

Come è noto dall'ottica geometrica, mettendo due lenti sottili di distanza focale rispettivamente f_1 , f_2 ad una distanza a , la distanza focale F del sistema è data da

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2} \quad (\text{AII.12})$$

Per $f_1 = -f_2 = f$

$$F = f^2/a > 0 \quad (\text{AII.13})$$

ed il sistema risulta convergente.

Analogamente una coppia di lenti magnetiche disposte come si è detto produce in entrambi i sensi un'azione focalizzante, con distanza focale F data dalla (AII.13) (ove f è dato dalla (AII.11)).

(*) Ricordiamo che entro la lente $f(s)=p$.

(**) Ricordiamo che tale distanza focale si riferisce allo scostamento nella direzione x . Per la direzione z la stessa lente è convergente (cfr. (AII.7) ed ha distanza focale uguale ed opposta.

Anche per le lenti magnetiche si possono definire vari tipi di "aberrazioni" analoghe a quelle delle lenti ottiche. Per esempio la dipendenza di f dalla velocità della particella (cfr. (AII.11)) corrisponde all'aberrazione cromatica.

In un sincrotrone a G.A. una coppia di lenti magnetiche è un componente dell'elemento periodico, ed anche per essa si può considerare una matrice caratteristica Γ . Infatti dalla trattazione fatta segue

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \\x'_1 &= x'_0 - x_0/F\end{aligned}\tag{AII.14}$$

indicando con gli indici 1 e 0 i valori relativi all'uscita ed all'entrata del sistema. Si trova quindi che

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{F} & 1 \end{bmatrix}\tag{AII.15}$$

ove k ha lo stesso significato che nel § VI-3.

L'inserzione di coppie di lenti quadripolari altera la matrice Δ e quindi il diagramma di stabilità. Inserendo tali lenti in modo opportuno si può fare in modo che il punto rappresentativo non cada in vicinanza delle linee proibite.

BIBLIOGRAFIA

Capitolo I

Sugli acceleratori di particelle in generale:

- Les accélérateurs de particules - Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de L. DE BROGLIE Ed. Revue d'Optique, Paris 1950.
- M.S. LIVINGSTON, Particle Accelerators, Adv. in Electronics 1, 269 (1948).
- M.S. LIVINGSTON, High Energy Accelerators, Interscience Publ., New York 1954.
- C. SIMANE, Accelerators of Ions and Electrons, Ed. Artia, Prague.
- R. KOLLATH, Teilchenbeschleuniger, Ed. Vieweg, Braunschweig 1955.
- J.H. FREMLIN and J.S. GOODEN, Cyclic Accelerators, Rep. on Progress in Phys. XIII, 295 (1950).
- P.H. STURROCK, Static and Dynamic Electron Optics, Cambridge Univ. Press, 1955.
- E. SEGRE, Experimental Nuclear Physics, Vol. III, Part XII, Ed. Wiley, New York 1959.

Sul principio della stabilità di fase:

- V. VEKSLER, A new method of acceleration of relativistic particles, J. of Phys. IX, 153 (1945).

Per i dati relativi alle macchine esistenti:

- American Institute of Physics Handbook, Mc Graw Hill Book Company, 1957 (Sect. 8i).

Sulle sorgenti di ioni:

- Handbuch der Physik, vol. XXXIII, Ed. Springer, Heidelberg.

Capitolo II

- R.J. VAN DE GRAAFF, J.G. TRUMP, W.W. BUECHNER, Electrostatic generators for the acceleration of charged particles, Rep. on Progress in Phys. XI, 1 (1946-47).
- R.L. FORTESCUE, High voltage direct current generators, Progr. in Nuclear Phys. I, 21 (1950).
- E. EVERHART and P. LORRAIN, The Cockroft-Walton voltage multiplying circuit, Rev. Scient. Instr. 24, 221 (1953).
- M.M. ELKIND, Ion optics in long high-voltage accelerator tubes, Rev. Scient. Instr. 24, 129 (1953).

Capitolo III

Sulle perdite di energia per irraggiamento:

- J. SCHWINGER, On the classical radiation of accelerated electrons Phys. Rev. 75, 1912 (1949).

Capitolo IV

- D.W. KERST, The acceleration of electrons by magnetic induction, Phys. Rev. 60, 48 (1941).
- D.W. KERST and R. SERBER, Electronic orbits in the induction accelerator, Phy. Rev. 60, 53 (1941).
- V. BOSLEY, Betatrons, J. Scient. Instr. 23, 277 (1946).
- H. KOPFERMANN, Die Elektronenschleuder, Erg. der Exac. Naturw. 22, 13 (1949).

Capitolo V

- D. BOHM and L. FOLDY, The Theory of the Synchrotron, Phys. Rev. 70, 249 (1946).
- J.S. GOODEN, H.H. JENSEN, J.L. SYMONDS, Theory of the Proto-synchrotron, Proc. Phys. Soc. A 59, 677 (1947).
- F.K. GOWARD, J.D. LAWSON, J.J. WILKINS, R. CARRUTHERS, The design of electron synchrotrons, Instr. of Elect. Eng. 97, 970 (1950).
- T.R. KAISER, The capture of particles into synchrotron orbits, Proc. Phys. Soc. A 63, 52 (1950).
- N.M. BLACKMAN and E.D. COURANT, Scattering of particles by the gas in a synchrotron, Phys. Rev. 74, 140 (1948).

Sull'iniezione a betatrone:

- J.J. WILKINS, Betatron Starting in Electron Synchrotrons, Phil. Mag. 41, 33 (1950).

Sul race-track:

- H.R. CRANE, The race-track, a proposed synchrotron modification, Phys. Rev. 69, 542 (1946) and Phys. Rev. 70, 800 (1946).
- N.M. BLACKMAN, Forced betatron oscillations in a synchrotron with straight sections, Rev. Scient. Instr. 22, 569 (1951).

Capitolo VI

- E.COURANT, M.S. LIVINGSTON, H. SNYDER, The Strong Focusing Synchrotron. A new high energy accelerator. Phys. Rev. 88, 1190 (1952).
- E.COURANT and H.SNYDER, Theory of the A.G. Synchrotron, Ann. of Phys. 3, 1 (1958).

- Lectures on the Theory and Design of an A.G. Proton Synchrotron, CERN 1953.
- E.R. CAIANIELLO and A. TURRIN, Stability and periodicity in the strong-focusing accelerator, N.Cim. 10, 594 (1953).

Sugli errori di allineamento:

- M. SANDS and B. TOUSCHEK, Alignment Errors in the Strong-Focusing Synchrotron, N.Cim. 10, 604 (1953).

Sull'algebra delle matrici:

- M. DENIS-PAPIN and A. KAUFMANN, Cours de calcul matriciel appliqué, Ed. Albin Michel, Paris 1951.

Capitolo VII

Per il ciclotrone:

- W.B. MANN, The Cyclotron, Ed. Wiley, New York, 1953.
- M.E. ROSE, Focusing and maximum energy of the ions in the cyclotron, Phys. Rev. 53, 392 (1938).
- R.R. WILSON, Magnetic and electrostatic focusing in the cyclotron, Phys. Rev. 53, 408 (1938).

Per il microtrone:

- C.HENDERSON, F.F. HEYMAN, R.E. JENNINGS, The design and operation of a 4,5 MeV microtron, Proc. Phys. Soc. B 66, 654 (1953).
- A.ROBERTS, The microtron as a high-energy, high current particle accelerator, Ann. of Phys. 4, 115 (1958).

Per il sincrociclotrone:

- D. BOHM and L. FOLDY, The Theory of the Sinchro-cyclotron, Phys. Rev. 72, 649 (1947).

Capitolo VIII

- D.W. FRY and W. WALKINSHAW, Linear Accelerators, Rep. on Progress in Phys. XII, 102 (1948-'49).
- J.C. SLATER, The Design of Linear Accelerators, Rev. Mod. Phys. 20, 473 (1948).
- Rev. Scient. Instr. 26 (1955): contiene una serie di articoli sulla realizzazione dei principali acceleratori lineari esistenti.

Capitolo IX

- Proceedings of the CERN Symposium on High Energy Accelerators and Pion Physics (1956) Vol. I.
- D.L. JUDD, Conceptual Advances in Accelerators, Ann. Rev. of Nucl. Science, 8, 181 (1958).

Appendice I

- CERN Symposium 1956 (v. Cap. IX).

Appendice II

- COURANT, LIVINGSTON, SNYDER, Phys. Rev. 88, 1190 (1952) (v. Cap. VI).
- F.B. SCHULL, C.E. McFARLAND, H.M. BRETSCHER, Concentration of a cyclotron beam by strong-focusing lenses, Rev. Scient. Instr. 25, 364 (1954).